



Skript zur Vorlesung

# Mathematik 1

WS 2007/2008

Georg Hoever

Fachbereich Elektrotechnik und  
Informationstechnik  
FH Aachen

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>1. Funktionen</b>	<b>2</b>
1.1. Elementare Funktionen . . . . .	2
1.1.1. Lineare Funktionen . . . . .	2
1.1.2. Quadratische Funktionen . . . . .	4
1.1.3. Polynome . . . . .	7
1.1.4. Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	9
1.1.5. Winkelfunktionen . . . . .	12
1.1.6. Exponentialfunktionen . . . . .	14
1.1.7. Die Betrags-Funktion . . . . .	16
1.2. Eigenschaften von Funktionen . . . . .	17
1.3. Umkehrfunktionen . . . . .	21
1.3.1. Wurzelfunktionen . . . . .	21
1.3.2. Arcus-Funktionen . . . . .	22
1.3.3. Der Logarithmus . . . . .	23
1.4. Modifikation von Funktionen . . . . .	25
1.4.1. Verkettung . . . . .	25
1.4.2. Verschiebung . . . . .	25
1.4.3. Skalierung . . . . .	26
1.4.4. Spiegelung . . . . .	27
<b>2. Komplexe Zahlen</b>	<b>28</b>
2.1. Grundlagen . . . . .	28
2.2. Eigenschaften . . . . .	30
2.3. Polardarstellung . . . . .	32
<b>3. Folgen und Reihen</b>	<b>34</b>
3.1. Folgen . . . . .	34
3.2. Reihen . . . . .	38
3.3. Spezielle Potenzreihen . . . . .	42
<b>4. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>44</b>
4.1. Grenzwerte . . . . .	44
4.2. Stetigkeit . . . . .	46
<b>5. Differenzialrechnung</b>	<b>48</b>
5.1. Differenzierbare Funktionen . . . . .	48
5.2. Rechenregeln . . . . .	51
5.3. Höhere Ableitungen und Kurvendiskussion . . . . .	54
5.4. Anwendungen . . . . .	58
5.4.1. Die Regel von De L'Hospital . . . . .	58
5.4.2. Das Newton Verfahren . . . . .	60

---

---

5.4.3. Taylorpolynome und -reihen . . . . .	61
<b>6. Integralrechnung</b>	<b>64</b>
6.1. Definition des Integrals und elementare Eigenschaften . . . . .	64
6.2. Integration als Umkehrung der Differenziation . . . . .	69
6.2.1. Partielle Integration . . . . .	71
6.2.2. Substitution . . . . .	73
6.2.3. Ausprobieren . . . . .	75
6.2.4. Partialbruch-Zerlegung . . . . .	75
<b>7. Vektorrechnung</b>	<b>76</b>
7.1. Vektoren und Vektorraum . . . . .	76
7.2. Linearkombination und Basis . . . . .	79
7.3. Das Skalarprodukt . . . . .	81
7.4. Das Vektorprodukt . . . . .	85
7.5. Ebenen und Geraden . . . . .	88
7.5.1. Darstellungsformen . . . . .	88
7.5.2. Schnittpunkte . . . . .	89
<b>8. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen</b>	<b>91</b>
8.1. Grundlagen . . . . .	91
8.2. Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .	94
8.3. Matrizen . . . . .	99
8.4. Quadratische Matrizen . . . . .	105
8.5. Determinanten . . . . .	109
<b>A. Schreibweisen</b>	<b>112</b>
<b>B. Ergänzungen zu Reihen</b>	<b>113</b>
<b>C. Ergänzungen zur Differenzialrechnung</b>	<b>116</b>
<b>D. Ergänzungen zur Vektorrechnung</b>	<b>120</b>
D.1. Skalarprodukt und Norm . . . . .	120
D.2. Abstandsbestimmung . . . . .	122
<b>E. Ergänzungen zu Determinanten</b>	<b>126</b>
<b>Index</b>	<b>131</b>

---

## Vorwort

Dieses Skriptum beinhaltet im wahrsten Sinne des Wortes das „Angeschriebene“, nämlich das, was im Laufe der Vorlesung an der Tafel oder dem OHP entstehen soll. Einige kurze erläuternde Texte sind eingefügt, aber das Skript hat keinen Lehrbuch-Anspruch. Es gibt genug Bücher, die den Stoff der Vorlesung in breiter und tiefer Form ausführlich darstellen (s.u.).

Das vorliegende Skript soll dazu dienen, den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung das Mitschreiben zu ersparen. Es soll nicht den Besuch der Vorlesung ersetzen. Ich glaube, die mündlichen Erläuterungen, das Aufzeigen von Querbezügen und zusätzliche Erklärungen tragen wesentlich zum Verständnis des Stoffs bei. In dieser Hinsicht sollte das Skript auch ausgiebig mit eigenen individuellen Eintragungen angereichert werden. Ich hoffe, dass es auf diese Weise den Besuchern meiner Vorlesung hilft, die Mathematik besser zu verstehen, gemäß des Mottos „Mitdenken statt Mitschreiben“.

Als vorlesungsbegleitende Bücher möchte ich empfehlen

- [**Stingl**] *Mathematik für Fachhochschulen*, Peter Stingl, 7. Auflage, Hanser
- [**Dürr**] *Mathematik für Ingenieure*, Klaus Dürrschnabel, 1. Auflage, Teubner
- [**Rie**] *Mathematik für Ingenieure*, Thomas Rießinger, 5. Auflage, Springer
- [**Pap1**] *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1*, Lothar Papula, 10. Auflage, Vieweg
- [**Pap2**] *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*, Lothar Papula, 8. Auflage, Vieweg

Neben einer teilweise ähnlichen, teilweise alternativ ergänzenden Darstellung des Stoffs enthalten diese Bücher auch weitere zahlreiche Beispiele und Übungen zur Vertiefung des in der Vorlesung vermittelten Stoffs. Übungsaufgaben mit ausgeführten Musterlösungen finden sich in

- [**RieÜ**] *Übungsaufgaben zu Mathematik für Ingenieure*, Thomas Rießinger, 2. Auflage, Springer
- [**PapÜ**] *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben*, Lothar Papula, 2. Auflage, Vieweg

Zum Ende der einzelnen Abschnitte finden sich Verweise auf die entsprechende Literatur und auf entsprechende Übungsaufgaben.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Reinhard Bodensiek bedanken, der das Manuskript mit mathematischem Überblick in technisch sehr versierter Weise ge $\text{\LaTeX}$  hat.

Aachen, im August 2007,

Georg Hoever

---

# 1. Funktionen

## 1.1. Elementare Funktionen

### 1.1.1. Lineare Funktionen

#### Definition 1.1

Eine Funktion der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx + a$  heißt *lineare Funktion* oder *Gerade*.

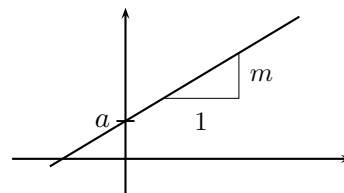
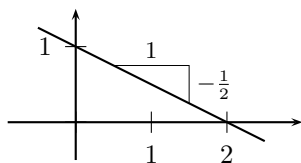
#### Bemerkungen:

1. Eine Funktion zwischen zwei Mengen  $M$  und  $N$  wird (exakt) beschrieben durch

$$f : \underbrace{M \rightarrow N}_{\text{welche Mengen}}, \quad \underbrace{x \mapsto f(x)}_{\text{Abbildungsvorschrift}}$$

2. Bei  $f(x) = mx + a$  gibt  $m$  die Steigung und  $a$  den  $y$ -Achsenabschnitt an.

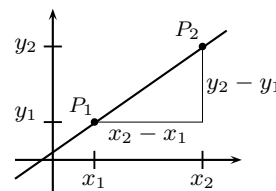
**Beispiel 1:**  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$



3. Eine Gerade wird durch zwei Punkte  $P_1 = (x_1, y_1)$  und  $P_2 = (x_2, y_2)$  eindeutig festgelegt.

Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs:

Es ist  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  und  $a$  ergibt sich durch Einsetzen eines Punktes, z.B.  $y_2 = mx_2 + a$ .



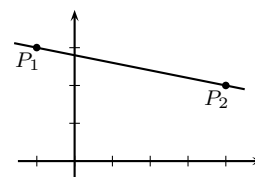
#### Beispiel 2:

Gerade durch  $P_1 = (-1, 3)$ ,  $P_2 = (4, 2)$ .

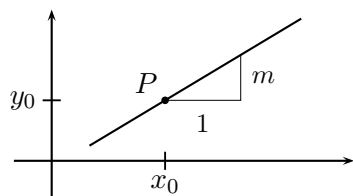
$$m = \frac{2 - 3}{4 - (-1)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$2 = -\frac{1}{5} \cdot 4 + a \Rightarrow a = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$\Rightarrow$  Geradengleichung ist  $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$



4. Eine Gerade wird durch einen Punkt  $P = (x_0, y_0)$  und die Steigung  $m$  eindeutig festgelegt.



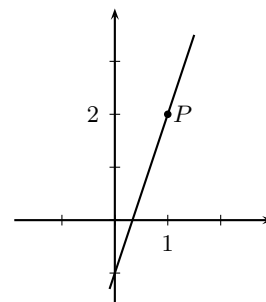
Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs:

1. In der Form  $f(x) = mx + a$ , Berechnung von  $a$  durch Einsetzen:  $y_0 = mx_0 + a$ .
2. Direkt in der Form  $f(x) = y_0 + m(x - x_0)$ .

**Beispiel 3:**

Gerade durch  $P = (1, 2)$  mit Steigung 3.

1.  $f(x) = mx + a$  mit  $m = 3$  und  $2 = 3 \cdot 1 + a$ ,  
also  $a = -1$  also  $f(x) = 3x - 1$ .
2.  $f(x) = 2 + 3(x - 1) = 2 + 3x - 3 = 3x - 1$ .



**Satz 1.2**

Die Gerade durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  mit Steigung  $m$  wird beschrieben durch  

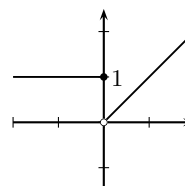
$$f(x) = y_0 + m(x - x_0).$$

**Bemerkung:**

Manchmal ist eine Funktion für verschiedene  $x$  unterschiedlich definiert.

**Beispiel 4:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 0, \\ x, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$



Literatur: [Pap1] III.5.2

Übungen: [Dürr] 3.2, 1,2,4

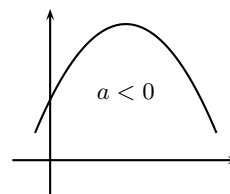
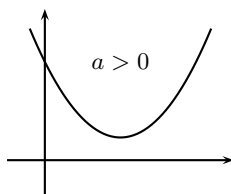
## 1.1.2. Quadratische Funktionen

**Definition 1.3**

Eine Funktion der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  heißt *quadratische Funktion* oder *Parabel*.

**Bemerkungen:**

1. Typisches Bild :



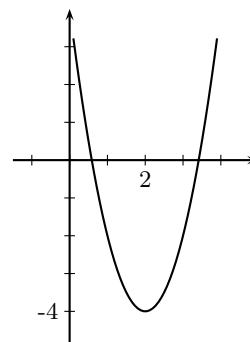
2. Durch *quadratische Ergänzung* erhält man die so genannte *Scheitelpunktform*

$$f(x) = a(x - e)^2 + f.$$

$P = (e, f)$  ist der *Scheitelpunkt*.

**Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 2) \\ &= 2\left(\underbrace{(x-2)^2}_{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} - 4 + 2\right) \\ &= 2((x-2)^2 - 2) \\ &= 2(x-2)^2 - 4. \end{aligned}$$

**Satz 1.4**

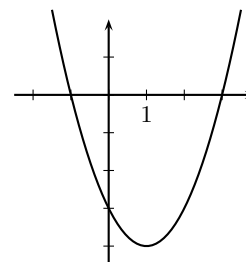
$f(x) = x^2 + px + q$  besitzt die Nullstellen  $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ .

**Beispiel 2:**

$x^2 - 2x - 3$  hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} \\ &= 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1.$$



Hat  $x^2 + px + q$  die Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ , so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

**Beispiel 3:**

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x - (-1)) = (x - 3)(x + 1).$$

$$\text{Test: } (x - 3)(x + 1) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3.$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2. \end{aligned}$$

**Satz 1.5** (Satz von Vieta)

*Hat  $x^2 + px + q$  zwei Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ , so gilt  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1 \cdot x_2 = q$ .*

**Beispiel 4:**

Findet man bei  $x^2 - 2x - 3$  die Nullstelle  $x_1 = -1$  durch Ausprobieren, so gilt für die zweite Nullstelle  $(-1) \cdot x_2 = -3$ , also  $x_2 = 3$ .

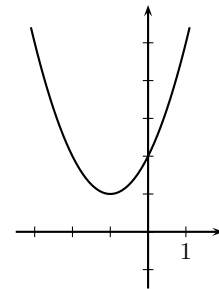
**Beispiel 5:**

Bei  $x^2 + 2x + 2$  liefert Satz 1.4

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2} \\ &= -1 \pm \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

also keine Lösung im Reellen.

Der Funktionsgraf schneidet die  $x$ -Achse nicht.



Bei  $ax^2 + bx + c$  muss man zunächst  $a$  ausklammern.

**Beispiel 6:**

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6:$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = +2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} = 2 \pm 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Also gilt  $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)$ .

**Bemerkungen:**

1. Hat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zwei Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ , so liegt der  $x$ -Wert  $x_s$  des Scheitelpunktes genau zwischen  $x_1$  und  $x_2$ :

$$x_s = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Bei  $x^2 + px + q$  ist  $x_s = -\frac{p}{2}$ .

**Beispiel 7:**

$x^2 - 2x - 3$  hat die Nullstellen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -1$ .

$\Rightarrow$  Der Scheitelpunkt liegt bei  $x_s = \frac{1}{2}(3 + (-1)) = 1$  (vgl. Bsp. 2)

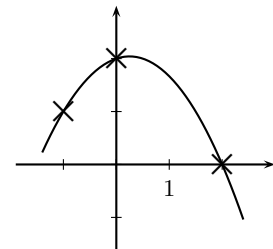
2. Durch drei Punkte mit unterschiedlichen  $x$ -Werten wird eindeutig eine Parabel festgelegt.

**Beispiel 8:**

Bestimmung der Parabelgleichung  $ax^2 + bx + c$  durch  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$  und  $(2, 0)$ :

Einsetzen liefert

$$\begin{array}{rcll} a & - & b & + & c & = & 1 \\ & & & & c & = & 2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ \hline a & - & b & & & = & -1 \\ \Rightarrow & & & & c & = & 2 \\ 4a & + & 2b & & & = & -2 \\ \hline 6a & & & & & = & -4 \\ \Rightarrow & & b & & & = & -1 - 2a \\ & & & & c & = & 2 \\ \hline \Rightarrow & & a & = & -\frac{2}{3} \\ & & b & = & \frac{1}{3} \\ & & c & = & 2 \end{array}$$



$\Rightarrow$  Die Parabelgleichung ist  $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ .

Literatur: [Dürr] 3.2.4; [Pap1] III.5.3

Übungen: [Dürr] 3.2, 5,7; [RieÜ] 3.1; [PapÜ] A4

### 1.1.3. Polynome

**Definition 1.6**

Eine Funktion der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  heißt *Polynom* (vom Grad  $n$ , falls  $a_n \neq 0$ ).

**Beispiel 1:**

1.  $2x^3 - 5x^2 + 1$  ist ein Polynom vom Grad 3.
2. Quadratische Funktionen sind Polynome vom Grad 2.
3. Lineare Funktionen sind Polynome.

**Satz 1.7**

Ist  $p$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$  und  $p(a) = 0$ , so gibt es ein Polynom  $q(x)$  vom Grad  $n - 1$  mit  $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$ .

**Beispiel 2:**

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2.$$

Durch Probieren erhält man  $f(1) = 0$ . bringt dann:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + 2x - 2) : (x - 1) = x^2 + 2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \phantom{- 2x - 2} \\ 2x - 2 \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2).$$

**Satz 1.8**

Jedes Polynom kann dargestellt werden als Produkt von linearen und nullstellenfreien quadratischen Polynomen.

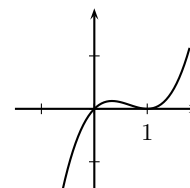
**Bemerkung:**

Ist  $p(x) = (x - a)^k \cdot q(x)$ ,  $q(a) \neq 0$ , so heißt  $a$  auch  $k$ -fache Nullstelle.

**Beispiel 3:**

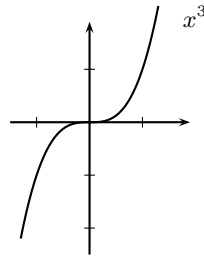
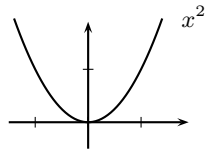
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x - 1)^2.$$

1 ist doppelte, 0 einfache Nullstelle von  $f$ .



Bei einer 2-, 4-, 6-, ...-fachen Nullstelle wird die  $x$ -Achse nur berührt; es findet kein Vorzeichenwechsel statt. Bei einer 1-, 3-, 5-, ...-fachen Nullstelle gibt es einen Vorzeichenwechsel.

**Beispiel 4:**



Literatur: [Dürr] 3.2.5; [Pap1] III.5.4

Übungen: [PapÜ] A1, A2

### 1.1.4. Gebrochen rationale Funktionen

**Definition 1.9**

Der Quotient zweier Polynome heißt (*gebrochen*) *rationale Funktion*.

**Beispiel 1:**

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

**Bemerkungen:**

1. Ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, so heißt  $f$  auch *echt gebrochen rationale Funktion*. Ansonsten kann durch Polynomdivision ein Polynom abgespalten werden.

**Beispiel 2:**

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$  ist nicht echt gebrochen rational. Es ist :

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 2x) : (x^2 + 2x + 1) = x - 1 + \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-x^3 - 2x^2 - x} \phantom{=} \\ -x^2 - 3x \phantom{=} \\ \underline{x^2 + 2x + 1} \phantom{=} \\ -x + 1 \phantom{=} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 1 + \underbrace{\frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 1}}_{\text{echt gebrochen rational}}.$$

2. Echt gebrochen rationale Funktionen kann man entsprechend den linearen und quadratischen Anteilen des Nennerpolynoms nach Satz 1.8 in die Summe einfacher Brüche zerlegen (*Partialbruch-Zerlegung*):

**Beispiel 3:**

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3}$$

Es ist  $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ .

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Ansatz}}{\Rightarrow} \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} \\ &= \frac{A(x + 1) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x + A - 3B}{(x - 3)(x + 1)}. \end{aligned}$$

Möglichkeiten zur Bestimmung von  $A$  und  $B$ :

1. Koeffizientenvergleich

- für den Koeffizienten von „ $x$ “:  $1 = A + B$  (I).
- für den Koeffizienten von „1“:  $5 = A - 3B$  (II).

$$\begin{array}{l} \stackrel{3I+II}{\Rightarrow} 8 = 4A \Rightarrow A = 2 \\ \stackrel{I}{\Rightarrow} 1 = 2 + B \Rightarrow B = -1 \end{array}$$

2. Einsetzen von  $x$ -Werten in  $x + 5 = A(x + 1) + B(x - 3)$ :

$$x = 3 \text{ führt zu } 8 = A \cdot 4 \Rightarrow A = 2$$

$$x = -1 \text{ führt zu } 4 = B(-1 - 3) \Rightarrow B = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x + 1}.$$

**Beispiel 4:**

$$f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Es ist  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ .

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Ansatz}}{\Rightarrow} \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{A(x + 1) + B}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei  $x$  bringt  $A = -1$ . Einsetzen von  $x = -1$  bringt  $-(-1) + 1 = B \Rightarrow B = 2$ .

$$\Rightarrow \frac{-x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

**Beispiel 5:**

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$$

Es ist  $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2)$ .

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Ansatz}}{\Rightarrow} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \\ &= \frac{A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 2)} \quad (*) \\ &= \frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x - 1)(x^2 + 2)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (C - B)x + 2A - C}{(x - 1)(x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Einsetzen von  $x = 1$  bei (\*):  $1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = A(1^2 + 2) \Rightarrow A = 3$

Koeffizientenvergleich bei  $x^2$ :  $1 = A + B = 3 + B \Rightarrow B = -2$

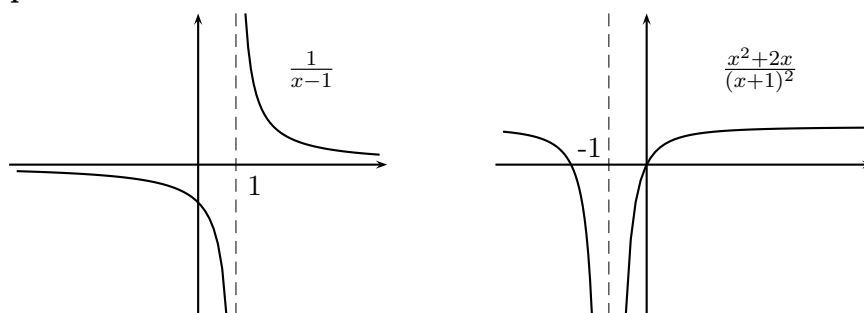
Koeffizientenvergleich bei 1:  $5 = 2A - C = 6 - C \Rightarrow C = 1$ .

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+2}$$

3. Ist  $x_0$  Nullstelle des Nenners und nicht Nullstelle des Zählers, so hat die Funktion dort eine *Polstelle*.

Bei einer einfachen (drei-, fünf-, ... fachen) Nullstelle wechselt dort das Vorzeichen, bei einer zweifachen (vier-, sechs-, ... fachen) bleibt es gleich.

**Beispiel 6:**

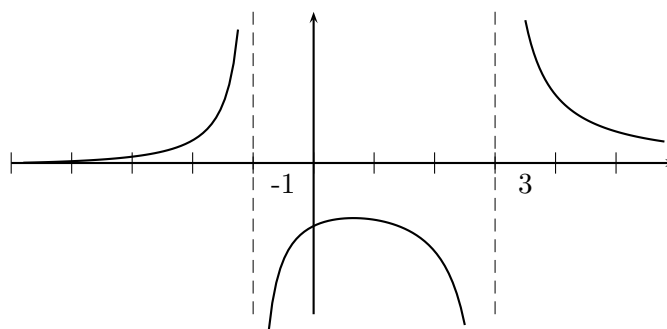


Die Partialbruchzerlegung ermöglicht damit oft schon eine grobe Skizze des Funktionsverlaufs.

**Beispiel 7:**

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1} \quad (\text{s. Beispiel 3})$$

Bei 3 und  $-1$  hat man also einen Pol mit Vorzeichenwechsel, Werte knapp über drei liefern große positive Funktionswerte, Werte knapp über  $-1$  liefern stark negative Funktionswerte.



Literatur: [Dürr] 3.3; [Pap1] III.6.1, III.6.2

Übungen: [Stingl] 8.3, 14; [PapÜ] A8, A10, A11, A14, A15

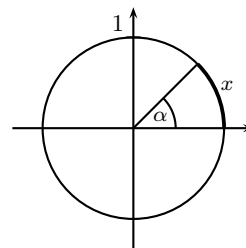
### 1.1.5. Winkelfunktionen

Neben der Angabe von Winkeln in Grad ist das *Bogenmaß* üblich. Dies entspricht der Länge des Kreisbogens im Einheitskreis (Radius = 1) bei entsprechendem Winkel:

$$360^\circ \hat{=} 2\pi, \quad 180^\circ \hat{=} \pi, \quad 1^\circ \hat{=} \frac{\pi}{180},$$

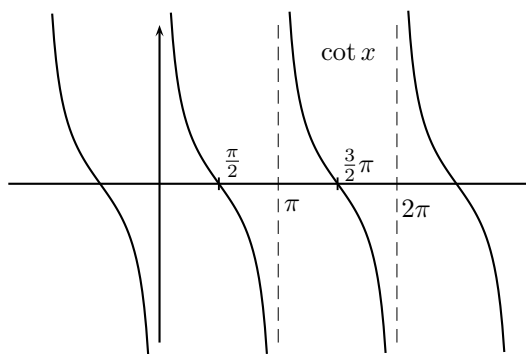
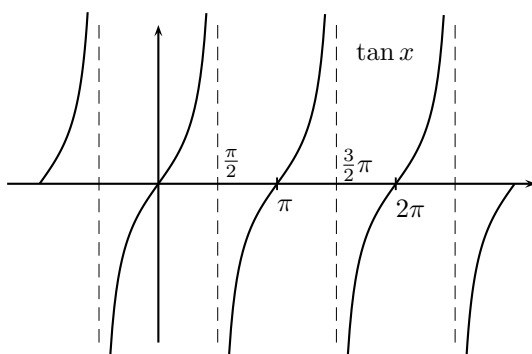
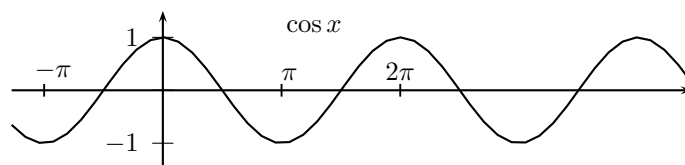
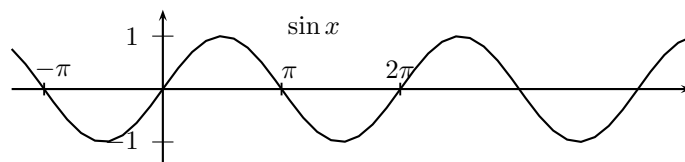
allgemein entspricht dem Winkel  $\alpha$  in Grad der Wert  $\frac{\pi}{180} \cdot \alpha$  im Bogenmaß, z.B.  $60^\circ \hat{=} \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ .

Im Folgenden wird (fast) ausschließlich das Bogenmaß verwendet.



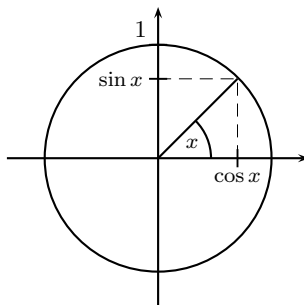
#### Definition 1.10

Die Funktionen  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  und  $\cot x$  heißen *Winkelfunktionen* oder *trigonometrische Funktionen*.



**Bemerkungen:**

1.  $\sin x$  und  $\cos x$  stellen Größen im Einheitskreis dar:



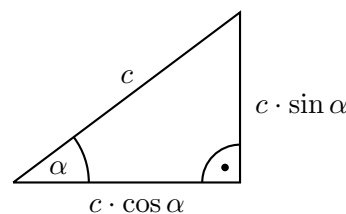
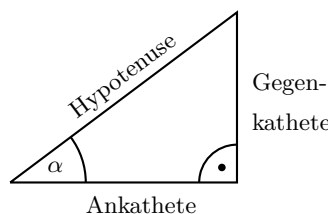
Es ist  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

2.  $\sin x$  und  $\cos x$  sind  $2\pi$ -periodisch,  $\tan x$  und  $\cot x$   $\pi$ -periodisch.
3. Statt  $(\sin x)^2$  schreibt man auch  $\sin^2 x$ , entsprechend  $\cos^2 x$ .
4. Wichtige Winkel und Werte:

	0	$\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

5. In einem rechtwinkligen Dreieck gilt

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

**Satz 1.11**

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (*trigonometrischer Pythagoras*)
2.  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  (*Additionstheoreme*)
3.  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

*insbesondere:*  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ,  
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ .

Literatur: [Dürr] 3.5; [Rie] 6.1; [Pap1] III.9.1, III.9.2, III.9.3, III.9.4

Übungen: [Dürr] 3.5, 1,2,4; [RieÜ] 6.1, 6.2, 6.3, 6.4; [PapÜ] A17, A19

**1.1. Elementare Funktionen**

### 1.1.6. Exponentialfunktionen

**Definition 1.12**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$  ( $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ) heißt *Exponentialfunktion*.

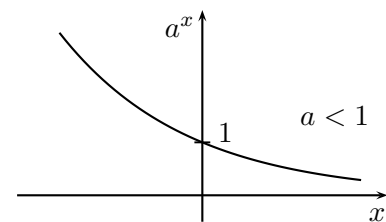
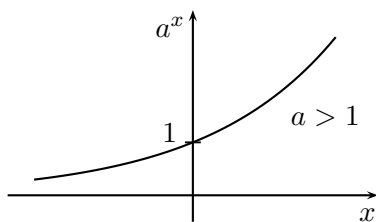
Besonders ausgezeichnet ist die Funktion  $\exp(x) = e^x$  mit der *Eulerschen Zahl*  $e \approx 2.71828\dots$

**Beispiel 1:**

$$f(x) = 2^x \text{ oder } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}.$$

**Bemerkungen:**

1. Typische Bilder:



2. Für  $a > 1$  wächst  $a^x$  sehr schnell.
3. Für jedes  $a$  ist  $a^0 = 1$ .

**Satz 1.13**

Sei  $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x,$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

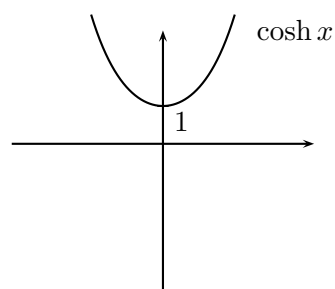
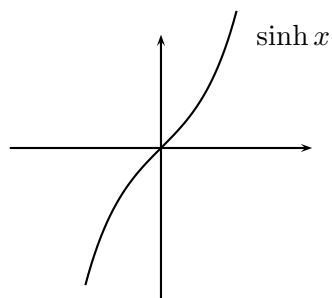
$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

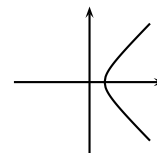
**Definition 1.14** (Hyperbelfunktionen)

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{sinus hyperbolicus})$$

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (\text{cosinus hyperbolicus}).$$

**Bemerkungen:**

1.  $\cosh x$  heißt auch Kettenlinien-Funktion. Die Funktion beschreibt die Form frei aufgehängter Ketten, Kabel oder Seile, z.B eine Hochspannungsleitung.
2. Die Punktmenge  $\{(\cosh x, \sinh x) | x \in \mathbb{R}\}$  beschreibt eine Hyperbel, daher der Name.
3. Wie bei  $\sin$  und  $\cos$  schreibt man  $(\sinh x)^2 = \sinh^2 x$ , entsprechend  $\cosh^2 x$ .

**Satz 1.15**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

**Beweis:**

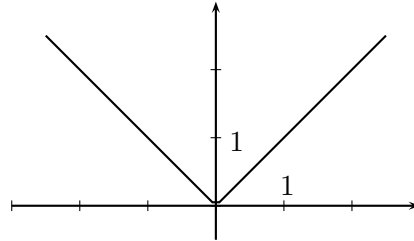
Einsetzen der Definition und elementares Nachrechnen.

Literatur: [Dürr] 3.6.1; [Rie] 6.2; [Pap1] III.11.1, III.11.2, III.11.3, III.13.1

Übungen: [Dürr] 3.6, 1,3,4,5,10; [RieÜ] 6.5, 6.6; [PapÜ] A38, A39, A40

### 1.1.7. Die Betrags-Funktion

Häufig interessiert nur der Absolutwert, nicht das Vorzeichen einer Zahl. Dies kann man als Funktion auffassen.



#### Definition 1.16

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  mit

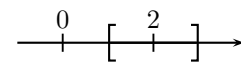
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases} \text{ heißt } \textit{Betrags-Funktion}.$$

#### Beispiel 1:

$$|3| = 3, \quad |-3| = -(-3) = 3$$

#### Bemerkung:

Häufig treten Ausdrücke wie  $|x - 2| \leq 1$  auf. Interpretation: Der Abstand von  $x$  zu 2 (nach rechts oder links) muss  $\leq 1$  sein.



#### Satz 1.17

1.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (*Dreiecksungleichung*).

#### Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 3 &= |-3| = |1 - 4| = |1 + (-4)| \\ &\leq |1| + |-4| = 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Literatur: [Dürr] 3.1

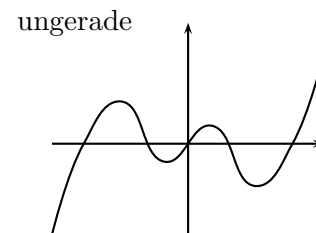
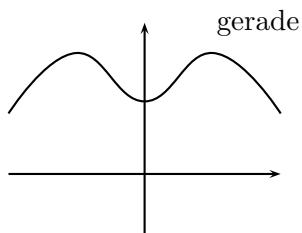
## 1.2. Eigenschaften von Funktionen

### Definition 1.18

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\text{gerade} \quad :\Leftrightarrow f(-x) = f(x),$$

$$\text{ungerade} \quad :\Leftrightarrow f(-x) = -f(x).$$



### Bemerkung:

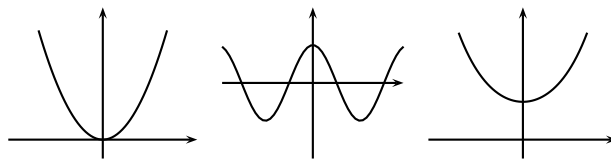
Eine gerade Funktion ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

Eine ungerade Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

### Beispiel 1:

Gerade Funktionen sind

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \cosh x$

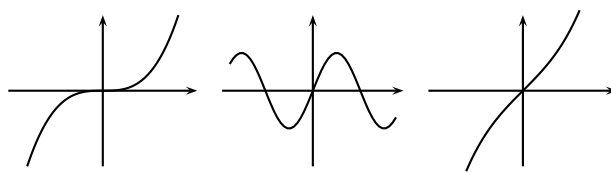


- Polynome, in denen nur gerade  $x$ -Potenzen auftreten, z.B.  $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$ .

### Beispiel 2:

Ungerade Funktionen sind

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \sinh x$

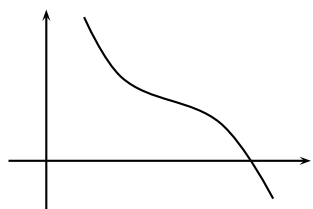


- Polynome, in denen nur ungerade  $x$ -Potenzen auftreten, z.B.  $x^5 - 4x^3 + 2x$ .

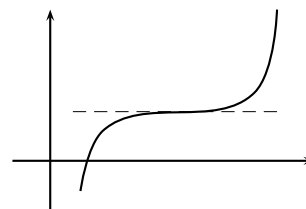
**Definition 1.19**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\begin{aligned} \text{monoton} \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} &: \Leftrightarrow \text{für } x, y \in I, x < y \text{ gilt } f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f(y), \\ \text{streng monoton} \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} &: \Leftrightarrow \text{für } x, y \in I, x < y \text{ gilt } f(x) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} f(y). \end{aligned}$$



streng monoton fallend



monoton wachsend

**Beispiel 3:**

$f(x) = x^3$  ist streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$ .



**Beispiel 4:**

$f(x) = x^2$  ist streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}^{\leq 0}$  und streng monoton wachsend auf  $\mathbb{R}^{\geq 0}$ .



**Definition 1.20**

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Funktion mit Wertemenge  $W = \{f(x) | x \in M\}$ .

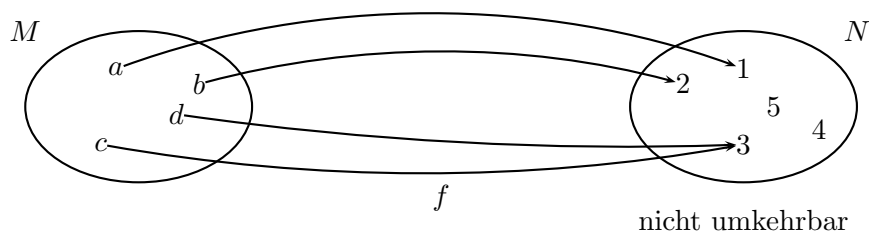
$f$  heißt *umkehrbar (injektiv)* : $\Leftrightarrow$  für  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

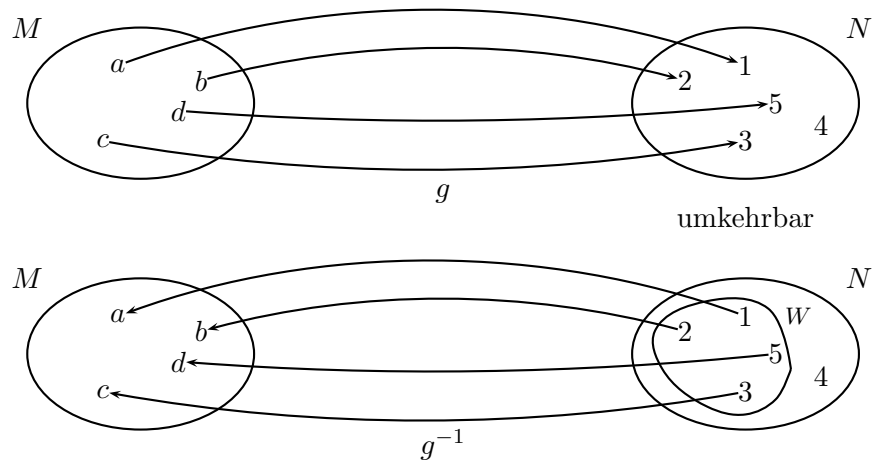
Die Funktion  $f^{-1} : W \rightarrow M$ , die jedem  $y \in W$  das (eindeutige)  $x \in M$  mit  $f(x) = y$  zuordnet, heißt *Umkehrfunktion*.

**Bemerkung:**

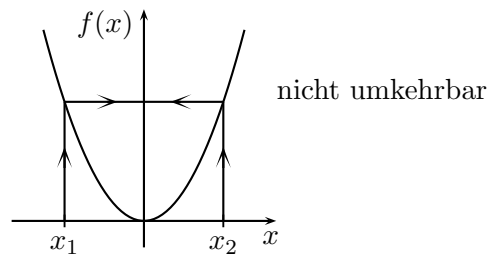
Die Bezeichnung  $f^{-1}$  ist nur ein Symbol; damit ich *nicht*  $\frac{1}{f}$  gemeint!

**Beispiel 5:**

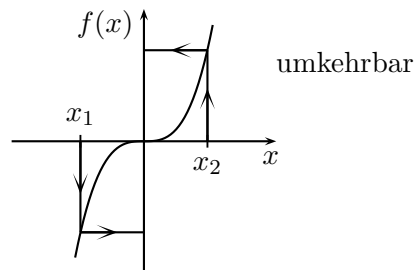




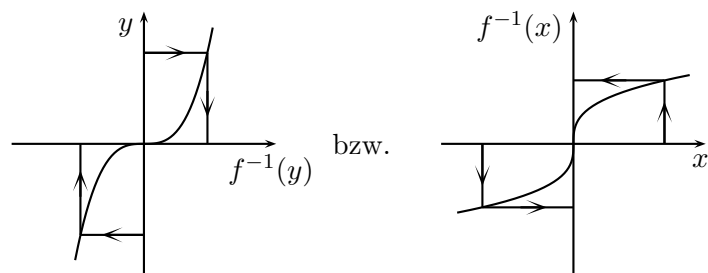
Beispiel 6:



Beispiel 7:



Umkehrfunktion:

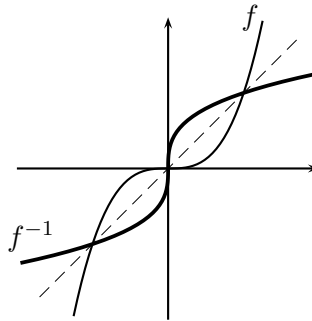


**Satz 1.21**

*Streng monotone Funktionen sind umkehrbar.*

**Bemerkungen:**

1. Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  umkehrbar, so erhält man den Funktionsgraph von  $f^{-1}$  durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

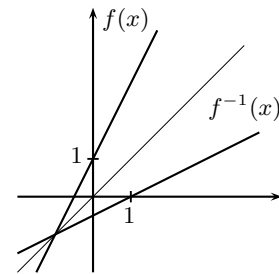


2. Rechnerisch erhält man die Umkehrfunktion zu  $y = f(x)$  durch Auflösen nach  $x$ . Üblicherweise tauscht man anschließend die Variablenbezeichnungen  $x$  und  $y$ .

**Beispiel 8:**

$$\begin{aligned} y &= f(x) = 2x + 1 \\ \Rightarrow y - 1 &= 2x \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Umkehrfunktion: } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$



3. Definitionsbereich von  $f^{-1}$  = Wertebereich von  $f$ .  
Wertebereich von  $f^{-1}$  = Definitionsbereich von  $f$ .

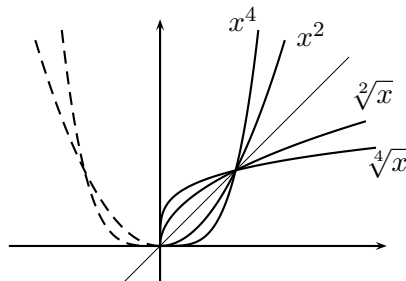
Literatur: [Dürr] 2.3.1; 2.3.4; [Pap1] III.2.2, III.2.3, III.2.5

Übungen: [Dürr] 2.3, 2; [RieÜ] 5.2

### 1.3. Umkehrfunktionen

#### 1.3.1. Wurzelfunktionen

Die Funktionen  $f(x) = x^n$  sind für  $x \geq 0$  streng monoton wachsend.


**Definition 1.22**

Die Umkehrfunktion zu  $x^n$  wird bezeichnet mit  $\sqrt[n]{x}$ .

**Bemerkungen:**

1. Statt  $\sqrt[2]{x}$  schreibt man meist  $\sqrt{x}$ .
2. Für negative  $x$  ist  $\sqrt{x}$  nicht die Umkehrfunktion zu  $x^2$ :

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1.$$

$$\text{Es gilt } \sqrt{x^2} = |x| \text{ für alle } x.$$

3. Beim Auflösen von  $\sqrt{\quad}$ -Gleichungen können sich durch das Quadrieren falsche Lösungen einschleichen.

**Beispiel 1:**

Gesucht  $x$  mit  $\sqrt{2x+3} = x$

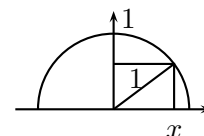
$$\Rightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ oder } x = -1$$

Es gilt  $\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$ , aber  $\sqrt{2(-1) + 3} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$ .

4.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  stellt einen Halbkreis mit Radius 1 dar,  
allg.  $\sqrt{R^2-x^2}$  einen Halbkreis mit Radius  $R$ .



Literatur: [Pap1] III.7.2

Übungen: [Dürr] 2.3, 5

### 1.3.2. Arcus-Funktionen

Auf  $\mathbb{R}$  sind die Winkelfunktionen nicht umkehrbar. Man kann sie aber auf bestimmte Intervalle einschränken, auf denen sie umkehrbar sind.

Ist allgemein  $M \subset N$  und  $f : M \rightarrow R$  eine Funktion, so schreibt man  $f|_N$  für die auf  $N$  eingeschränkte Funktion:  $f|_N : N \rightarrow R$ .

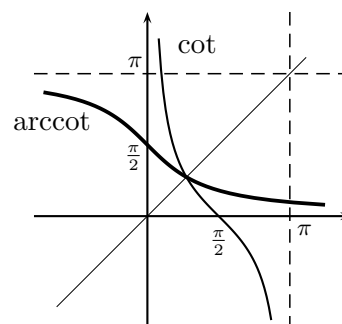
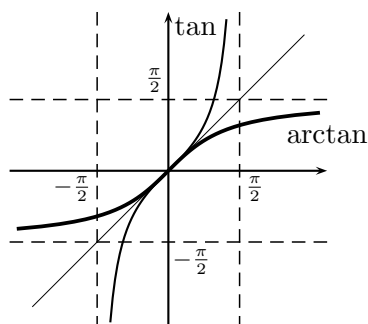
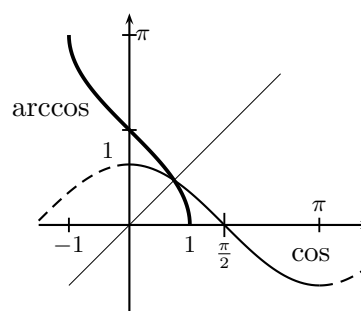
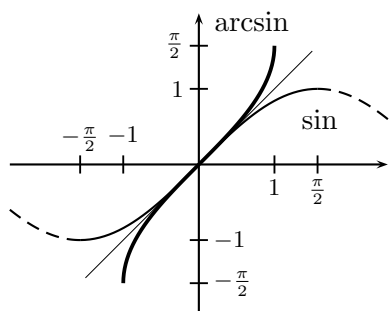
#### Definition 1.23

$$\arcsin := \left( \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{Arcus-sinus}).$$

$$\arccos := \left( \cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad (\text{Arcus-cosinus}).$$

$$\arctan := \left( \tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad (\text{Arcus-tangens}).$$

$$\operatorname{arccot} := \left( \cot|_{]0, \pi[} \right)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \pi[ \quad (\text{Arcus-cotangens}).$$

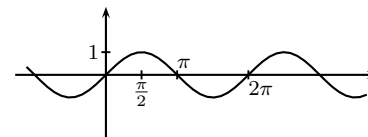


#### Bemerkung:

Durch Symmetriebetrachtung kann man aus  $w = \arcsin x$  weitere  $\tilde{w}$  mit  $\sin \tilde{w} = x$  finden.

#### Beispiel 1:

Der Taschenrechner liefert  $\arcsin 0.9 \approx 1.12$ . Dann ist  $\sin 1.12 \approx 0.9$ , aber auch  $\sin(1.12 + 2\pi) \approx 0.9$ ,  $\sin(\pi - 1.12) \approx 0.9, \dots$



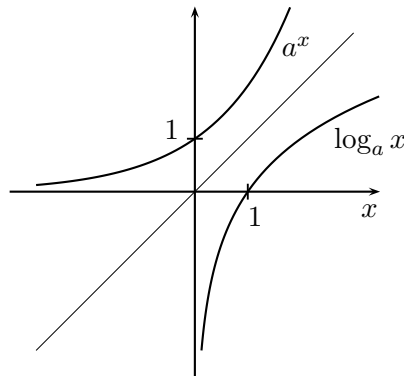
Literatur: [Rie] 6.1; [Pap1] III.10.1, III.10.2, III.10.3, III.10.4

### 1.3.3. Der Logarithmus

Die Exponentialfunktionen  $a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ,  $a \neq 1$  sind streng monoton auf  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.24**

Die Umkehrfunktion zu  $a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ,  $a \neq 1$ , wird mit  $\log_a x$  bezeichnet. („Logarithmus zur Basis  $a$  von  $x$ “).



**Bemerkungen:**

1. Spezielle Basen sind ausgezeichnet:

$$\ln x := \log_e x \text{ (Logarithmus naturalis)}$$

$$\text{ld } x := \log_2 x \text{ (Logarithmus dualis, manchmal auch mit lb bezeichnet)}$$

$$\log x := \lg x := \log_{10} x \text{ (Manchmal bezeichnet } \log x \text{ allerdings auch } \log_e x)$$

2.  $\log_a x$  wächst sehr langsam.
3. Für jedes  $a$  ist  $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$ .

**Satz 1.25**

Für  $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ ,  $a, b \neq 1$  gilt:

$$1. \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y \in \mathbb{R}^{>0})$$

$$2. \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad (x \in \mathbb{R}^{>0}, y \in \mathbb{R})$$

$$3. \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \quad (x \in \mathbb{R}^{>0}).$$

**Beweis von 3.:**

$$\log_b x = \log_b \left( a^{\log_a x} \right) \stackrel{2.}{=} \log_a x \cdot \log_b a$$

**Bemerkung:**

Satz 1.25.3 kann man in der Form

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

nutzen, um Logarithmen zu Basen  $a$  zu berechnen, die nicht auf dem Taschenrechner sind.

**Bemerkung:**

Man kann auch zu  $\sinh x$  und  $\cosh x$  Umkehrfunktionen definieren, die so genannten Area-Funktionen,  $\operatorname{arsinh}$ ,  $\operatorname{arcosh}$ , ...

Literatur: [Dürr] 3.6.2; [Rie] 6.2; [Pap1] III.12.1, III.12.2

Übungen: [PapÜ] A28, A29, A30, A31

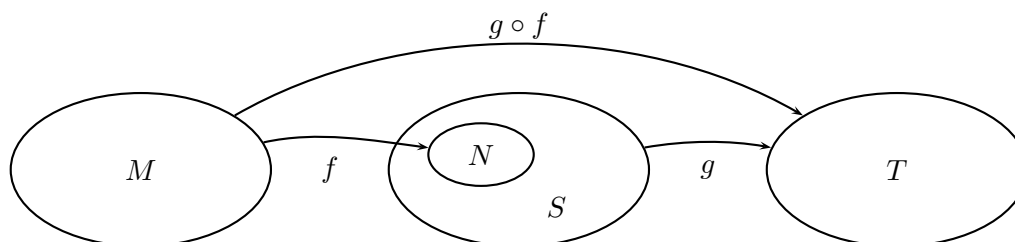
## 1.4. Modifikation von Funktionen

### 1.4.1. Verkettung

#### Definition 1.26

Seien  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : S \rightarrow T$  Funktionen und  $N \subseteq S$ .

Dann bezeichnet  $g \circ f$  („ $g$  kringel  $f$ “, „ $g$  nach  $f$ “) die Funktion  $M \rightarrow T$ ,  $g \circ f(x) = g(f(x))$  (Verkettung/ Komposition von  $f$  und  $g$ ).



#### Beispiel 1:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 1$

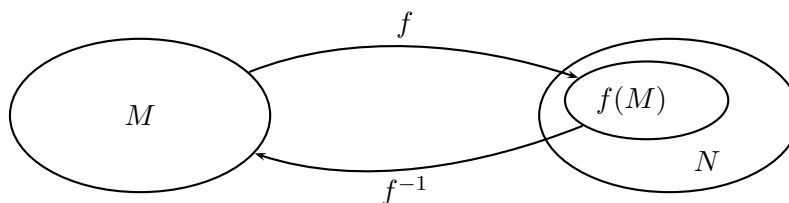
$$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

An Beispiel 1 sieht man, dass im Allgemeinen  $f \circ g \neq g \circ f$  ist.

#### Bemerkung:

Ist  $f : M \rightarrow N$  umkehrbar, so ist  $f^{-1} \circ f$  die Identität auf  $M$  und  $f \circ f^{-1}$  die Identität auf  $f(M) = \{f(x) | x \in M\}$ .



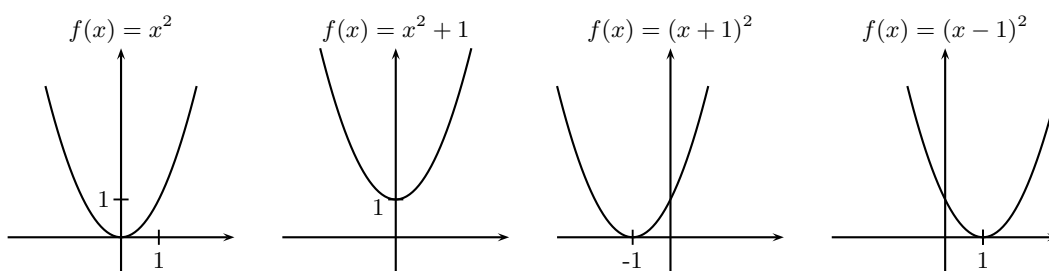
### 1.4.2. Verschiebung

Verkettung von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x + a$  bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen:

$f(x) + a$  : Verschiebung um  $a$  nach oben

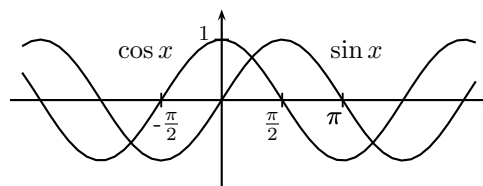
$f(x + a)$  : Verschiebung um  $a$  nach links

$f(x - a)$  : Verschiebung um  $a$  nach rechts

**Beispiel 1:****Beispiel 2:**

$\sin x$  und  $\cos x$  sind gegeneinander verschoben:

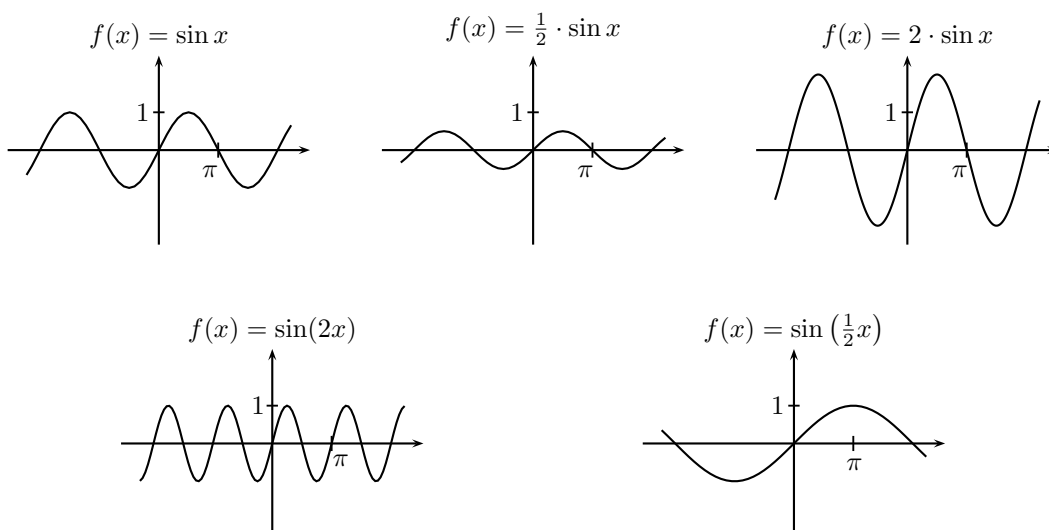
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

**1.4.3. Skalierung**

Verkettung von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \cdot x$ ,  $a > 0$ , bewirkt eine Stauchung / Streckung des Funktionsgraphen.

$a \cdot f(x)$  : Stauchung ( $a \in ]0, 1[$ ) bzw. Streckung ( $a > 1$ ) in  $y$ -Richtung.

$f(a \cdot x)$  : Stauchung ( $a > 1$ ) bzw. Streckung ( $a \in ]0, 1[$ ) in  $x$ -Richtung.

**Beispiel 1:**

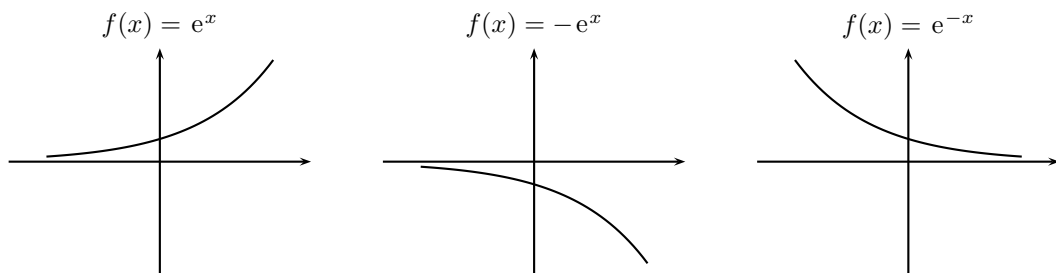
#### 1.4.4. Spiegelung

Verkettung von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-x$  bewirkt eine Spiegelung des Funktionsgraphen.

$-f(x)$  : Spiegelung an der  $x$ -Achse

$f(-x)$  : Spiegelung an der  $y$ -Achse

##### Beispiel 1:



Literatur: [Dürr] 2.3.2

Übungen: [Dürr] 2.3, 6; 3.6, 6; [RieÜ] 5.8

## 2. Komplexe Zahlen

### 2.1. Grundlagen

Die Gleichung  $x^2 = -1$  hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung. Wir führen die imaginäre Einheit  $j$  (oft auch  $i$ ) ein, die  $j^2 = -1$  erfüllen soll.

**Definition 2.1**

$\mathbb{C} := \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  heißt Menge der *komplexen Zahlen*.

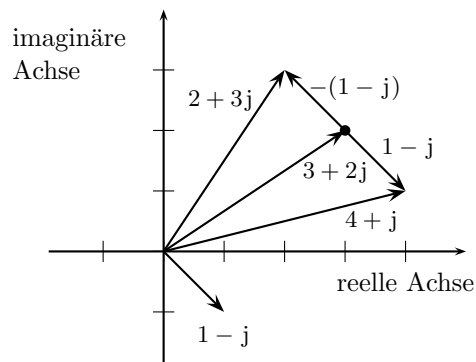
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  addiert, subtrahiert und multipliziert man wie üblich mit  $j$  als Parameter unter Berücksichtigung von  $j^2 = -1$ .

**Beispiel 1:**

$$(3 + 2j) + (1 - j) = 3 + 1 + (2 - 1)j = 4 + j$$

$$(3 + 2j) - (1 - j) = 3 + 2j - 1 + j = 2 + 3j$$

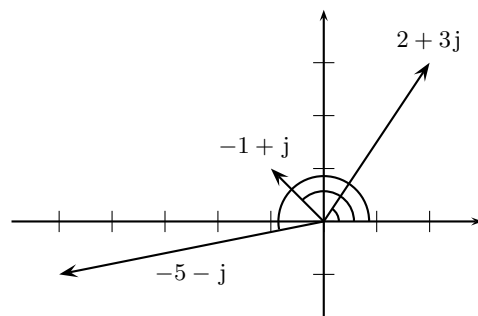
Komplexe Zahlen kann man inder in der *Gaußschen Zahlenebene* darstellen:



**Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} (2 + 3j) \cdot (-1 + j) &= 2(-1 + j) + 3j(-1 + j) \\ &= -2 + 2j - 3j + 3j^2 \\ &= -2 + (2 - 3)j + 3(-1) \\ &= -5 - j. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation werden die Längen (Beträge) multipliziert und die Winkel addiert.



**Definition 2.2**

Zu  $z = a + bj \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  heißt

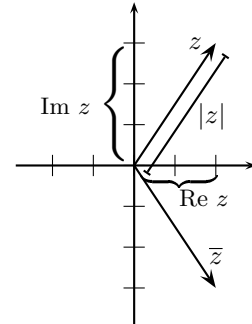
- $a$  Realteil ( $\operatorname{Re} z$ ) und  $b$  Imaginärteil ( $\operatorname{Im} z$ ),
- $\bar{z} := a - bj$  die zu  $z$  konjugierte komplexe Zahl,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  Betrag von  $z$ .

**Beispiel 3:**

Zu  $z = 2 + 3j$  ist

$$\operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = 3, \bar{z} = 2 - 3j,$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

**Beispiel 4:**

$$|-1 + j| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|-5 - j| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{2}.$$

Literatur: Stingl, 4.1, 4.2; [Dürr] 1.4; [Rie] 10.1, 10.2; [Pap2] III.1.1, III.1.2, III.1.3

Übungen: Stingl, 4.1, 1,3,5,6,9; 4.2, 1,2; [Dürr] 1.4, 1,2,3; [RieÜ] 10.1

## 2.2. Eigenschaften

### Satz 2.3

- (1) In  $\mathbb{C}$  gelten bzgl.  $+$  und  $\cdot$  die gleichen Gesetze wie in  $\mathbb{R}$ .
- (2) Es ist  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .
- (3) Für  $z \neq 0$  ist  $\frac{1}{z} = z^{-1} := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .
- (4) Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  und  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .
- (5)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .
- (6)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Dreiecksungleichung).

### Bemerkungen:

1. Satz 2.3(2) ergibt sich wegen:

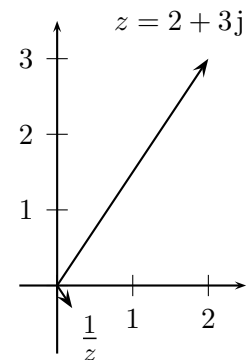
$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bj)(a - bj) = a^2 - (bj)^2 \\ &= a^2 - b^2 j^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

2. Satz 2.3(3) erhält man durch Erweiterung mit  $\bar{z}$ :

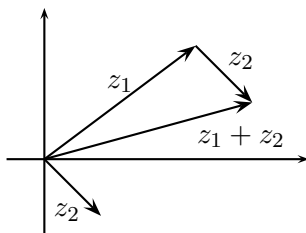
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \stackrel{2.3(2)}{=} \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

### Beispiel 1:

$$\frac{1}{2 + 3j} = \frac{2 - 3j}{(2^2 + 3^2)} = \frac{2 - 3j}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}j$$



3. Der Name „Dreiecksungleichung“ wird in der Gaußschen Zahlenebene plausibel:



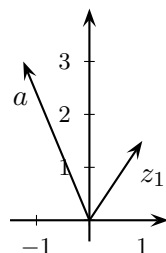
4. Auf  $\mathbb{C}$  gibt es kein  $>$  oder  $<$ . Aussagen wie  $j < 1$  sind sinnlos.
5. Für jedes  $a \in \mathbb{C}$  gibt es ein  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $z_1^2 = a$ ; mit  $z_1$  gilt auch für  $z_2 = -z_1$ :  $z_2^2 = (-z_1)^2 = z_1^2 = a$ .

### Beispiel 2:

$$a = -2 : z_1 = \sqrt{2} \cdot j, z_2 = -\sqrt{2} \cdot j.$$

Die  $\sqrt{\quad}$ -Funktion ist weiterhin nur für reelle Zahlen  $\geq 0$  definiert.

Grafisch erhält man ein solches  $z_1$  durch Halbierung des Winkels und  $\sqrt{\quad}$ -Nehmen des Betrags.



**Satz 2.4** (Fundamentalsatz der Algebra)

In  $\mathbb{C}$  besitzt jedes Polynom  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  genau  $n$  Nullstellen (inklusive Vielfachheit)  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Es gilt  $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ .

Man sagt auch: In  $\mathbb{C}$  kann man jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen.

**Beispiel 3:**

$z^2 + 1$  besitzt die Nullstellen  $\pm j$ :  $z^2 + 1 = (z - j)(z + j)$ .

**Beispiel 4:**

$p(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$  besitzt  $z = 1$  als Nullstelle.

Polynomdivision bringt  $p(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 5)$  Nullstellen von  $z^2 + 2z + 5$  sind

$$z = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2j.$$

$$\Rightarrow p(z) = (z - 1)(z - (-1 + 2j))(z - (-1 - 2j)).$$

**Bemerkung:**

Ist  $p(z)$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so ist mit  $z_0$  immer auch  $\bar{z}_0$  Nullstelle, denn es gilt

$$\begin{aligned} p(\bar{z}_0) &= a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1\bar{z}_0 + a_0 \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{p(z_0)} = \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

Literatur: Stingl, 4.2

Übungen: [RieÜ] 10.2

### 2.3. Polardarstellung

In die Exponentialfunktion  $x \mapsto e^x$  kann man auch komplexe Werte einsetzen (vgl. S. 42) und erhält so  $e^z$  für  $z \in \mathbb{C}$  definieren. Es gilt weiterhin  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ .

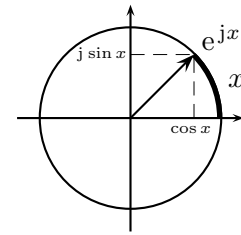
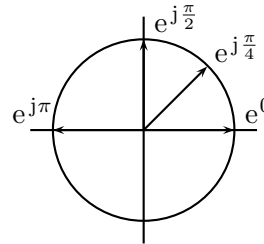
Insbesondere gilt also für  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $e^{a+jb} = \underbrace{e^a}_{\text{bekannt}} \cdot e^{jb}$ .

#### Satz 2.5

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x.$$

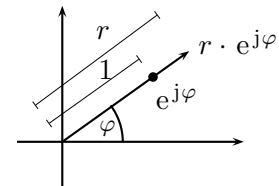
#### Beispiel 1:

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{j \cdot 0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1 \\ e^{j \frac{\pi}{2}} &= j \\ e^{j\pi} &= -1 \\ e^{j2\pi} &= 1 \end{aligned}$$



Jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist eindeutig beschrieben durch den Abstand  $r$  zu 0 und den Winkel  $\varphi$  zur reellen Achse. Es besitzt also die Darstellung

$$\begin{aligned} z &= r \cdot \cos \varphi + j \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \\ &= r \cdot e^{j\varphi}. \end{aligned}$$



#### Satz 2.6

Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  gibt es eine Polardarstellung  $z = r \cdot e^{j\varphi}$ ,  $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

#### Bemerkungen:

1. Wegen  $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2\pi)}$  ist das  $\varphi$  in der Polardarstellung nicht eindeutig.
2. Für  $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$  gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = r_1 r_2 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

(Multiplikation komplexer Zahlen: Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel, vgl. Seite 28.)

3. Satz 2.5 erlaubt die Herleitung der Additionstheoreme (s. Satz 1.11):  
Einerseits gilt

$$e^{j(x+y)} = \cos(x+y) + j \sin(x+y).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} e^{j(x+y)} &= e^{jx+jy} = e^{jx} \cdot e^{jy} \\ &= (\cos x + j \sin x)(\cos y + j \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + j(\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \text{und } \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Literatur: [Stingl] 4.2; [Dürr] 3.6.4; [Rie] 10.3; [Pap2] III.1.4

Übungen: [Stingl] 4.2, 6,7,10; [Dürr] 3.6, 12; [RieÜ] 10.3, 10.6, 10.7

### 3. Folgen und Reihen

#### 3.1. Folgen

**Definition 3.1**

Eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \mapsto a_n$  heißt *Folge* (Schreibweise:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

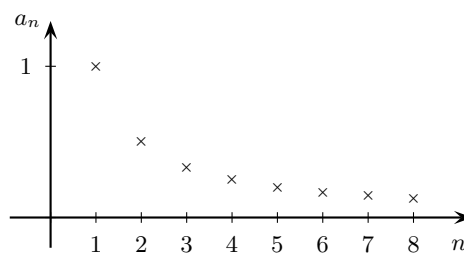
**Bemerkung:**

Sind alle  $a_n \in \mathbb{R}$ , so spricht man auch von *reeller Folge*.

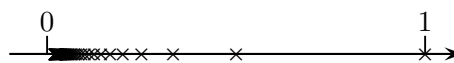
**Beispiel 1:**

$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge; zu  $n$  ist  $\frac{1}{n}$  ein Folgenglied. Darstellung:

1. Als „Funktionsgraf“:



2. Auf der Zahlengerade:


**Definition 3.2**

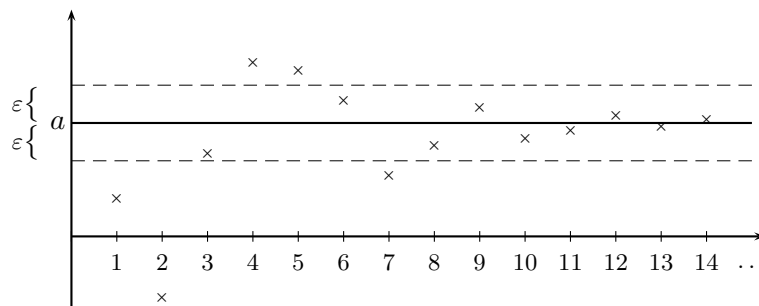
Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent gegen den Grenzwert*  $a$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ )

$:\Leftrightarrow$  für alle  $\varepsilon > 0$  gilt: Für alle großen  $n$  ist  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

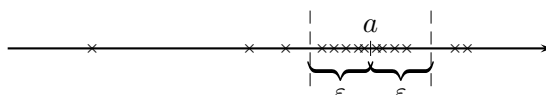
Andernfalls heißt die Folge *divergent*.

**Bemerkungen:**

- „für alle großen  $n$  gilt ...“ bedeutet genauer:  
Es gibt ein  $N$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt: ...
- Die Menge  $U_\varepsilon(a) = \{x \mid |a - x| < \varepsilon\}$  heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  bedeutet also: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt: Für alle großen  $n$  liegt  $a_n$  in  $U_\varepsilon(a)$ .



bzw. auf der Zahlengerade:



Im Bild liegen die Folgenglieder ab  $a_8$  in der angedeuteten  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

### Beispiel 2:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Denn sei  $\varepsilon > 0$  fest gewählt (dies entspricht dem Teil „für alle  $\varepsilon > 0$ “ der Konvergenzdefinition). Dann gilt für  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , dass  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , also  $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ .

### Beispiel 3:

Sei  $a_n = 3$  für alle  $n$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ .

### Bemerkung:

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

### Satz 3.3

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen mit Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$ .

Dann gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ ,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$ , für  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

- Ist  $b \neq 0$ , so ist  $b_n \neq 0$  für große  $n$  und es gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

### Beispiel 4:

- $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ . Daher gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$ .

- $\frac{n^3 + n}{4n^3 + 1} = \frac{n^3 (1 + \frac{1}{n^2})}{n^3 (4 + \frac{1}{n^3})} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$ .

$$3. \frac{n+2}{n^2+1} = \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0.$$

**Bemerkung:**

Aus der Konvergenz der Summe bzw. des Produkts zweier Folgen kann man nicht auf die Konvergenz der einzelnen Folgen schließen!

**Beispiel 5:**

Die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = (-1)^n$  und  $b_n = -a_n$  sind nicht konvergent, aber  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = a_n + b_n = 0$  ist konvergent.

Wichtige Folngengrenzwerte:

**Satz 3.4**

1. Für jedes  $a > 0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$ .
2. Für jedes  $a > 0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .
3. Für jedes  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .
4. Für jedes  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n = 0$   
und sogar für jedes  $a$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot q^n = 0$ .

**Beispiel 6:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

**Definition 3.5**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge.

Man sagt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ )

$:\Leftrightarrow$  Für jedes  $C > 0$  gilt  $a_n > C$  für alle großen  $n$ .

(entsprechend für  $-\infty$ )

**Satz 3.6**

Sei  $a_n > 0$  für alle  $n$ . Dann gilt:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Bemerkung:**

Aus Satz 3.4(4.) und Satz 3.6 folgt für jedes  $Q > 1$  und jedes  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^n}{n^a} = \infty,$$

d.h., für  $Q > 1$  wächst  $Q^n$  schneller als jede Potenz von  $n$ .

**Beispiel 7:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n + 2} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{2n^2 + 1} = -\infty.$$

**Satz 3.7**

Sind  $p$  und  $q$  Polynome mit führenden Koeffizienten  $a_p$  und  $a_q$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } q \text{ einen größeren Grad als } p \text{ hat,} \\ \frac{a_p}{a_q} & , \text{ falls } p \text{ und } q \text{ gleichen Grad haben,} \\ \left( \text{Vorzeichen von } \frac{a_p}{a_q} \right) \cdot \infty & , \text{ falls } p \text{ einen größeren Grad als } q \text{ hat.} \end{cases}$$

Literatur: [Dürr] 10.1, 10.2; [Rie] 4.2; [Pap1] III.4.1

Übungen: [Dürr] 10.2, 1,2,5; [RieÜ] 4.1, 4.2, 4.5

### 3.2. Reihen

**Schreibweise:**  $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

Die Bezeichnung des Index ist irrelevant:  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{l=1}^n a_l.$

**Beispiel 1:**

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

#### Definition 3.8

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zahlen und  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  die  $n$ -te *Partialsomme*.

Dann bezeichnet die *Reihe*  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die bei der Summation der  $a_k$  entsteht.

Konvergiert  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so heißt die Reihe *konvergent*,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet dann auch den Grenzwert. Andernfalls heißt die Reihe *divergent*.

Gilt  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , so schreibt man auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$

**Beispiel 2:**

$$\begin{array}{rcll} a_k = \frac{1}{2^k} : & k & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ & a_k & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\ & s_1 & = & \frac{1}{2} & & & \\ & s_2 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & = & \frac{3}{4} \\ & s_3 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & = & \frac{7}{8} \\ & & & \dots & & & & & & \end{array}$$

**Bemerkung:**

Die  $a_k$  kann man sich als Folge von Schritten vorstellen, die Partialsomme ist dann die Gesamtstrecke, die nach  $n$  Schritten zurückgelegt wurde (Summe der einzelnen Schritte).

Konvergenz einer Reihe bedeutet, dass man „zur Ruhe“ kommt,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$  bedeutet, dass die Schrittfolge „ins Unendliche“ führt.

**Beispiel 3:**

Sei  $a_k = (-1)^{k+1}$ , also  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, \dots$

Dann ist  $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$  Man kommt nicht „zur Ruhe“, die Reihe divergiert.

**Beispiel 4:**

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  heißt *geometrische Reihe*.

Es gilt

$$\begin{aligned} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1 - q) &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ &\quad - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{also } s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Falls  $|q| < 1$  ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$  also  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ . Daraus folgt:

**Satz 3.9**

Die geometrische Reihe konvergiert für  $|q| < 1$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .

**Beispiel 5:**

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

**Beispiel 6 (Teleskopsumme):**

Betrachte  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$ , also  $a_k = \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^n a_k = a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \quad (\text{die Summe schiebt sich wie ein Teleskop zusammen}) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  die Reihe konvergiert mit  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = 1$ .

Damit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert, müssen die Folgenglieder  $a_k$  (die Schritte) gegen Null streben.

Die Umkehrung gilt aber nicht: Falls die Folgenglieder gegen Null gehen, muss nicht automatisch schon die Reihe konvergieren.

**Beispiel 7:**

Die harmonische Reihe:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .

Die Summanden  $\frac{1}{k}$  konvergieren gegen 0. Aber an

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots \\ \geq & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \cdots \\ = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

sieht man, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist.

**Satz 3.10**

Die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{k}$  konvergiert nicht.

**Satz 3.11** (Rechenregeln für Reihen)

Sind  $\sum a_k = a$  und  $\sum b_k = b$  konvergente Reihen, so gilt:

1.  $\sum (a_k \pm b_k) = a \pm b$
2. Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt:  $\sum \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot a$ .

**Beispiel 8:**

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2 - k} = 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 2 \cdot 1 = 2.$$

**Satz 3.12** (Vergleichs-Kriterium)

1. Ist  $b_k \geq 0$ ,  $\sum b_k$  konvergent und  $|a_k| \leq b_k$ , so ist auch  $\sum a_k$  konvergent.
2. Ist  $b_k \geq 0$ ,  $\sum b_k = \infty$  und  $a_k \geq b_k$ , so ist auch  $\sum a_k = \infty$ .

**Bemerkung:**

Der Satz besagt anschaulich:

1. Kommt man mit der Schrittfolge  $b_k$  zur Ruhe ( $\sum b_k$  konvergent) und macht noch kleinere Schritte  $a_k$  ( $|a_k| \leq b_k$ ), so kommt man auch mit der Schrittfolge  $a_k$  zur Ruhe ( $\sum a_k$  konvergent).
2. Kommt man mit der Schrittfolge  $b_k$  ins Unendliche ( $\sum b_k = \infty$ ) und macht noch größere Schritte  $a_k$  ( $a_k \geq b_k$ ), so kommt man auch mit der Schrittfolge  $a_k$  ins Unendliche ( $\sum a_k = \infty$ ).

**Beispiel 9:**

Da  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$  gilt und  $\sum \frac{1}{k^2-k}$  konvergiert, folgt die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( = \frac{\pi^2}{6} \right)$ .

**Satz 3.13**

(1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$  ist für  $a > 1$  konvergent und für  $a \leq 1$  divergent.

(2)  $\sum_{k=1}^{\infty} k^a \cdot q^k$  ist für  $|q| < 1$  und jedes  $a$  konvergent.

(3) Sind  $p$  und  $q$  zwei Polynome, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(k)}{q(k)} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \text{der Grad von } q \text{ ist um mindestens 2 größer als der von } p.$$

**Beispiel 10:**

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+k}$  konvergiert nicht.

(Für große  $k$  ist  $\frac{k^2+1}{k^3+k} \approx \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$  und  $\sum \frac{1}{k}$  konvergiert nicht.)

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^3+1}$  konvergiert.

(Für große  $k$  ist  $\frac{k+4}{k^3+1} \approx \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$  und  $\sum \frac{1}{k^2}$  konvergiert.)

**Definition 3.14**

Ein Ausdruck der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  heißt *Potenzreihe*.

**Beispiel 11:**

1.  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ .

2.  $\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$ .

**Bemerkung:**

Eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist eine unendliche Summe in Verallgemeinerung eines

Polynoms  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  (endliche Summe).

Literatur: [Stingl] 3.5; [Dürr] 17.1, 17.2; [Rie] 9.1, 9.2; [Pap1] VI.1.1, VI.1.2, VI.2.1

Übungen: [Stingl] 3.5, 1, 5; [Dürr] 17.1, 1,2,3,5; 17.2, 3,7; [RieÜ] 9.1, 9.12

### 3.3. Spezielle Potenzreihen

#### Erinnerung:

$$k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k, \quad 0! := 1 \quad (,k\text{-Fakultät}").$$

#### Satz 3.15

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k, \quad \text{insbesondere } e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (\text{eulersche Zahl}).$$

Die Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ . In die Potenzreihe kann man auch  $x \in \mathbb{C}$  einsetzen und so  $e^z$  für  $z \in \mathbb{C}$  definieren, vgl. S. 32.

#### Bemerkung:

Aus der Potenzreihe der  $e$ -Funktion erhält man die Potenzreihen zu  $\sin$  und  $\cos$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(jx) + \frac{1}{2!}(jx)^2 + \frac{1}{3!}(jx)^3 + \frac{1}{4!}(jx)^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + j\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - j\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + -\dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + -\dots \\ &\quad + j \left( \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + -\dots \right). \end{aligned}$$

Wegen  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$  (s. Satz 2.5) folgt:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + -\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + -\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}. \end{aligned}$$

Ferner erhält man auch die Potenzreihen zu  $\cosh$  und  $\sinh$ :

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \right) + \left( 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + -\dots \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{ähnlich: } \sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

Zusammenfassung wichtiger Potenzreihen:

**Satz 3.16**

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \\
 \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\
 \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \\
 \sinh x &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\
 \cosh x &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k} \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \quad (|x| < 1)
 \end{aligned}$$

Daraus kann man weitere Potenzreihen berechnen.

**Beispiel 1:**

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots \\
 &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

1. Die Potenzreihenentwicklungen sind gute Näherungen für kleine Argumente  $x$ , also

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \dots$$

2. Eine Funktion mit der Potenzreihenentwicklung  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist

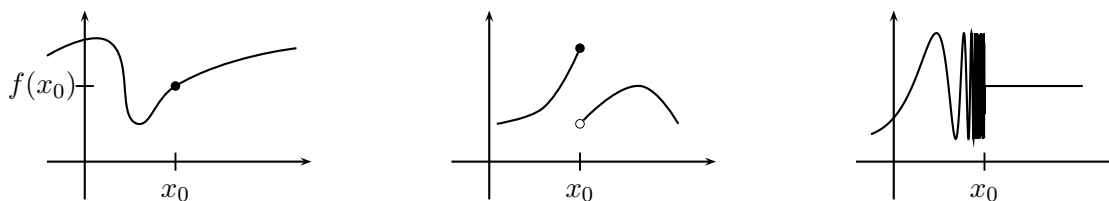
$$\begin{aligned}
 \text{ungerade} &\Leftrightarrow a_{2k} = 0 && \text{(es treten nur ungerade } x\text{-Potenzen auf)} \\
 \text{gerade} &\Leftrightarrow a_{2k+1} = 0 && \text{(es treten nur gerade } x\text{-Potenzen auf)}
 \end{aligned}$$

Literatur: [Dürr] 18.3

Übungen: [Dürr] 18.3, 1,2

## 4. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

### 4.1. Grenzwerte



Die Bilder zeigen unterschiedliche Funktionsverläufe. Nur im linken Bild hat man ein „braves“ Verhalten der Funktion bei  $x_0$ : Nähert man sich mit Argumenten  $x$  der Stelle  $x_0$ , so nähern sich auch die Funktionswerte  $f(x)$  dem Wert  $f(x_0)$ .

#### Definition 4.1

Sei  $f$  eine Funktion.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \\ \text{und } x_n \text{ aus dem Definitionsbereich von } f \text{ gilt } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y. \end{array}$$

Falls  $x_0 \in \mathbb{R}$  und nur Folgen  $x_n > x_0$  zugelassen sind, so schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y \text{ entsprechend } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Dabei ist  $x_0 = \pm\infty$  bzw.  $y = \pm\infty$  zugelassen (bei reellem Definitions- bzw. Zielbereich).

#### Beispiel 1:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, x_0 = 2$ . Dann ist  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ , denn für jede Folge  $x_n \rightarrow 2$  gilt offensichtlich  $x_n^2 \rightarrow 4$ .

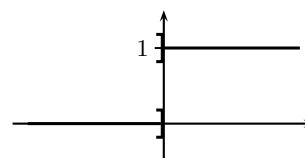
#### Beispiel 2 (Heaviside-Funktion):

$$\text{Sei } H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$  existiert nicht, denn sei  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ; dann

besitzt  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$  keinen Grenzwert, aber  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Es ist aber  $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0$ .



#### Bemerkungen:

1.  $x_0$  muss nicht im Definitionsbereich von  $f$  liegen, wohl aber die  $x_n$ .

#### Beispiel 3:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

Für  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  betrachtet man Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \neq 0$  und  $x_n \rightarrow 0$ .

2. Potenzreihenentwicklungen können bei Grenzwertberechnungen hilfreich sein.

**Beispiel 4:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das Wachstumsverhalten für  $x \rightarrow \infty$  ist ähnlich wie bei Folgen:

**Satz 4.2**

(1) Für  $Q > 1$  und jedes  $a$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q^x}{x^a} = \infty$

(„ $Q^x$  wächst schneller als jede Potenz von  $x$ “).

(2) Für  $|q| < 1$  und jedes  $a$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} q^x x^a = 0$ .

(3) Für jedes  $a > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \cdot \ln x = 0$

(„Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz von  $x$ “).

(4) Sind  $p$  und  $q$  Polynome mit führenden Koeffizienten  $a_p$  und  $a_q$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } q \text{ einen größeren Grad als } p \text{ hat,} \\ \frac{a_p}{a_q} & , \text{ falls } p \text{ und } q \text{ gleichen Grad haben,} \\ \left(\text{Vorzeichen von } \frac{a_p}{a_q}\right) \cdot \infty & , \text{ falls } p \text{ einen größeren Grad als } q \text{ hat.} \end{cases}$$

**Beispiel 5:**

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x x^3 = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} (-x)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x x^2 = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Literatur: [Stingl] 7.1; [Dürr] 10.4; [Rie] 5.3; [Pap1] III.4.2

Übungen: [Stingl] 7.1, 3,4; [Dürr] 10.4, 1; 18.4, 3; [RieÜ] 5.5 Übungen: [PapÜ] D29, D30

## 4.2. Stetigkeit

### Definition 4.3

Eine Funktion  $f$  heißt *stetig in*  $x_0 \in D : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Eine Funktion  $f$  heißt *stetig* :  $\Leftrightarrow f$  ist stetig in allen  $x_0 \in D$ .

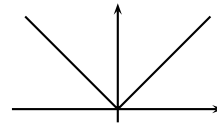
### Beispiel 1:

$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$  ist nicht stetig,

denn  $H$  ist nicht stetig in 0.  $H$  ist aber stetig in allen  $x_0 \neq 0$ .

### Beispiel 2:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  ist stetig.



### Satz 4.4

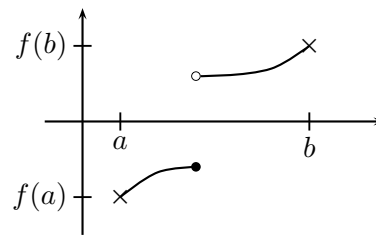
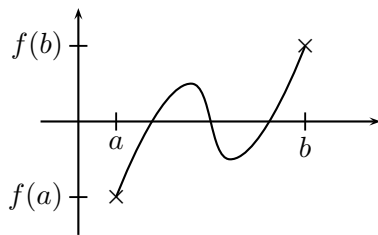
Alle „normalen“ Funktionen (Polynome, Exponential-, Wurzel-, trigonometrische Funktionen, ...) sind stetig.

### Satz 4.5 (Nullstellensatz)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (oder umgekehrt), so gibt es ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = 0$ .

### Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung „ $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  oder umgekehrt“ kann auch formuliert werden als  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
2. Die beiden Bilder zeigen, dass die Voraussetzung der Stetigkeit für den Satz essenziell ist:



3. Nullstellen kann man mittels des Bisektions- / Intervallhalbierungsverfahren numerisch bestimmen:

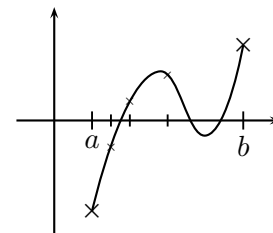
Sei  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ .

Bestimme  $w := f\left(\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{Intervallmittelpunkt}}\right)$

Ist  $w \geq 0$ , so liegt die Nullstelle in  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ .

Ist  $w < 0$ , so liegt die Nullstelle in  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ .

Iteration führt zu immer besseren Einschachtelungen.



**Beispiel 3:**

$$f(x) = x^3 + x - 1: f(0) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow \text{Nullstelle in } [0, 1]$$

$$f(0.5) = -0.375 \Rightarrow \text{Nullstelle in } [0.5, 1]$$

$$f(0.75) \approx 0.172 \Rightarrow \text{Nullstelle in } [0.5, 0.75]$$

...

Literatur: [Stingl] 7.2; [Dürr] 10.5; [Rie] 5.4; [Pap1] III.4.3

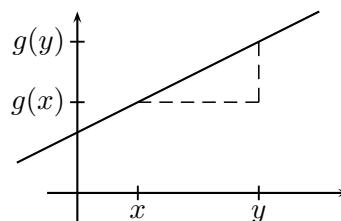
Übungen: [Stingl] 7.2, 2,10,11; [Dürr] 10.5, 1,2,3; [RieÜ] 5.6, 5.7, 5.10

## 5. Differenzialrechnung

### 5.1. Differenzierbare Funktionen

Bei einer Geraden  $g(x) = mx + a$  ergibt sich die Steigung  $m$  als

$$m = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}.$$

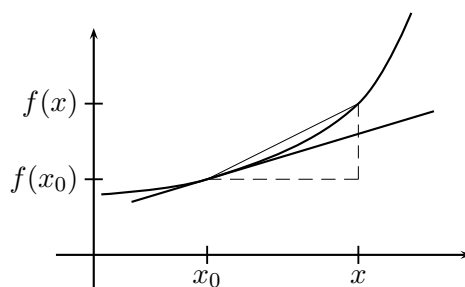


**Beispiel 1:**

Bei  $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$  ist

$$m = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Was kann man unter der Steigung einer beliebigen „glatten“ Kurve verstehen?



Die Steigung der Tangente! Und wie kann man die berechnen?

Als Grenzwert der Sekantensteigungen:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

#### Definition 5.1

Sei  $f$  eine Funktion mit Definitionsbereich  $D$  und  $x_0 \in D$ .

$f$  heißt *differenzierbar* in  $x_0$

$$:\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0+h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existiert.}$$

In diesem Fall wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  bezeichnet (*Ableitung*).

$f$  heißt *differenzierbar* (in  $D$ )  $:\Leftrightarrow f$  ist differenzierbar in jedem  $x_0 \in D$ .

Die Funktion  $f' : D \rightarrow K$ ,  $x \mapsto f'(x)$  heißt dann *Ableitung* von  $f$ .

Der Ausdruck  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  heißt *Differenzenquotient*.

**Bemerkung:**

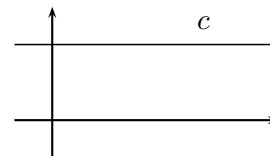
Die Definition gilt sowohl für reelle  $D \subseteq \mathbb{R}$  als auch für komplexe  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Ebenso kann die Bildmenge  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sein. Daher wird hier allgemein  $f : D \rightarrow K$  geschrieben.

**Beispiel 2:**

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto c$ , für ein festes  $c \in \mathbb{C}$ .

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

**Beispiel 3:**

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto mx + a$  für ein festes  $m, a \in \mathbb{C}$ .

Dann ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{mx + a - (mx_0 + a)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m.$$

**Beispiel 4:**

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^2$ .

Dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = x^2$  ist differenzierbar mit  $f'(x) = 2x$ .

**Beispiel 5:**

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^x$  ist differenzierbar mit  $f'(x) = e^x$ .

Anschaulich bedeutet „ $f$  ist differenzierbar in  $x_0$ “, dass  $f$  in der Nähe von  $x_0$  durch eine Gerade angenähert werden kann (Tangente).

**Satz 5.2**

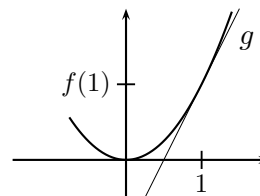
Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , so wird die Tangente  $t$  zu  $f$  in  $x_0$  beschrieben durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

**Beispiel 6:**

$f(x) = x^2$  in  $x_0 = 1$ . Es ist  $f'(x_0) = 2x_0$ , also wird die Geradengleichung beschrieben durch

$$g(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$

**Bemerkung:**

1. Im Alltag begegnet man der Ableitung in Form der Geschwindigkeit. Ist  $s(t)$  die zurückgelegte Strecke, so ist die Änderung des Ortes pro Zeit die Geschwindigkeit,  $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$  ist die Durchschnittsgeschwindigkeit,  $s'(t)$  ist die Momentangeschwindigkeit.

(Bei Zeitabhängigkeiten schreibt man in der Physik auch  $\dot{s}$  statt  $s'$ .)

2. Es ist  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Damit der Grenzwert existiert, muss  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  gelten, also  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d.h.,  $f$  muss stetig in  $x_0$  sein.

Die Umkehrung gilt aber nicht!

**Beispiel 7:**

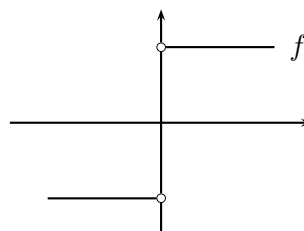
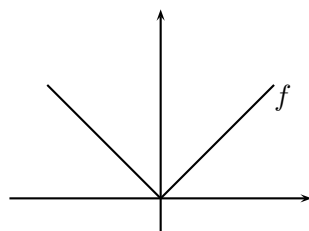
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|.$$

$f$  ist stetig in  $\mathbb{R}$ , also insbesondere in  $x_0 = 0$ . Es gilt aber

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases},$$

so dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  nicht existiert.

$\Rightarrow f$  ist nicht differenzierbar in 0.



Literatur: [Stingl] 7.3; [Dürr] 11.1; [Rie] 7.1; [Pap1] IV.1.1, IV.1.2, IV.1.3, IV.3.2

Übungen: [Stingl] 7.3, 2; [Dürr] 11.1, 1,2,6

## 5.2. Rechenregeln

### Satz 5.3

Sind  $f$  und  $g$  differenzierbare Funktionen, so sind auch  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\lambda \cdot f$  und, falls  $g \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  differenzierbar mit:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$\text{speziell: } \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

### Beispiel 1:

Betrachte  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^3 \cdot x} = -\frac{2}{x^3}.$$

### Satz 5.4 (Kettenregel)

Die Verkettung differenzierbarer Funktionen  $f, g$  ist wieder differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}.$$

### Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[g(f(x)) - g(f(x_0))] \cdot (f(x) - f(x_0))}{(f(x) - f(x_0)) \cdot (x - x_0)} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

### Beispiel 2:

Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto ax$  und  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto e^x$ . Dann ist  $f'(x) = a$  und  $g'(x) = e^x$ , also

$$(g \circ f)(x) = e^{ax} \quad \text{und} \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{ax} \cdot a.$$

### Folgerungen:

1. Für  $a = j$  ergibt sich daraus speziell

$$(e^{jx})' = j \cdot e^{jx} = j(\cos x + j \sin x) = j \cos x - \sin x.$$

Andererseits ist  $(e^{jx})' = (\cos x + j \sin x)' = (\cos x)' + j(\sin x)'$ . Der Vergleich von Real- und Imaginärteil bei reellem  $x$  ergibt so

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{und} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Damit ergibt sich nach der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

2. Für  $a > 0$  ist  $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$ , also

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

### Beispiel 3:

Gesucht ist die Ableitung zu  $x \mapsto \sin^2 x$ . In der Form  $\sin x \cdot \sin x$  kann man die Ableitung mit der Produktregel berechnen. Man kann aber auch die Kettenregel nutzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x &\Rightarrow f'(x) &= \cos x \\ g(x) &= x^2 &\Rightarrow g'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel erhält man so:  $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ .

## Übersicht über wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
$x^n$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$e^x$	$e^x$	
$a^x$	$a^x \ln a$	$a^x = e^{x \ln a}$ , $a \in \mathbb{R}^{>0}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ , $x, a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	

Literatur: [Stingl] 7.3; [Dürr] 11.2; [Rie] 7.2; [Pap1] IV.2.1, IV.2.2, IV.2.3, IV.2.4, IV.2.5

Übungen: [Stingl] 7.3, 13,14,15,17,19,21; [Dürr] 11.2, 4,6; [RieÜ] 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.17, 7.18; [PapÜ] B1-B32, B55, B56, B63, B64, B65

### 5.3. Höhere Ableitungen und Kurvendiskussion

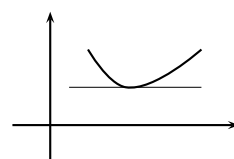
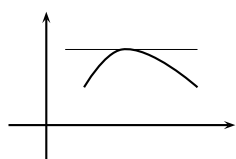
#### Definition 5.5

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . Man sagt:

$f$  hat in  $x_0$  ein lokales  $\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}$   $:\Leftrightarrow$  es gibt eine Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  mit:

$$\text{für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D \text{ gilt } f(x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f(x_0).$$

$x_0$  heißt dann *lokale Extremstelle*.



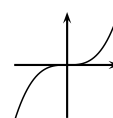
#### Satz 5.6

Ist  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so gilt

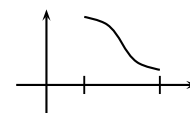
$$x_0 \in ]a, b[ \text{ ist lokale Extremstelle} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

#### Bemerkungen:

1. Die Rückrichtung " $\Leftarrow$ " im Satz 5.6 gilt nicht. Beispielsweise hat die Funktion  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  die Ableitung  $f'(x) = 3x^2$ , also insbesondere  $f'(0) = 0$ , 0 ist aber keine Extremstelle von  $f$ .



2. Es ist wichtig, dass  $x_0$  im Inneren des Intervalls liegt. Bei einer lokalen Extremstelle am Rand muss die Ableitung (einseitig betrachtet) nicht gleich Null sein.

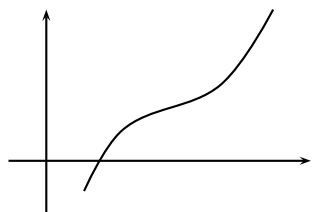


3. Satz 5.6 kann benutzt werden, wenn man das Maximum oder Minimum einer differenzierbaren Funktion sucht: Man berechnet die Nullstellen der Ableitung. Liegt die Extremstelle im Inneren des Definitionsbereichs, so muss sie eine der Nullstellen sein. Eventuell sind gesonderte Überlegungen für die Ränder des Definitionsbereichs nötig.

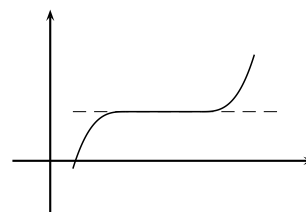
#### Satz 5.7

Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.

$$\text{Gilt } f'(x) \begin{cases} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{cases} 0 \text{ für } x \in ]a, b[, \text{ so ist } f \begin{cases} \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{cases}$$



streng monoton wachsend

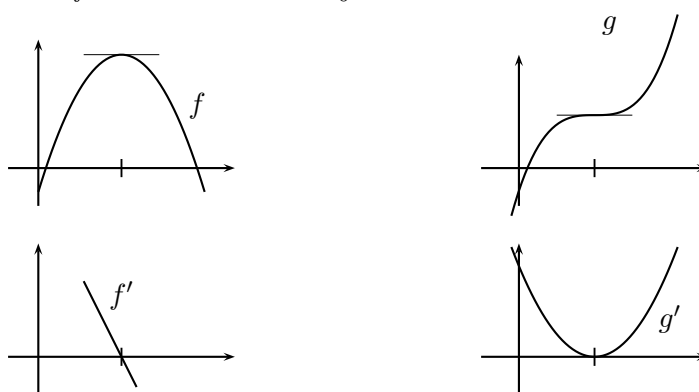


monoton wachsend

**Bemerkung:**

Wie man am Beispiel  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  sieht, folgt aus der strengen Monotonie nicht zwangsläufig, dass  $f'(x)$  immer echt grösser oder kleiner Null ist.

Satz 5.6 besagt, dass  $f'(x_0) = 0$  eine notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle ist. Wie verhält sich  $f'$  in der Nähe von  $x_0$ ?



Man sieht: Bei einer Extremstelle wechselt das Vorzeichen der Ableitung. Keine Extremstelle liegt vor, wenn das Vorzeichen der Ableitung gleich bleibt. Die Ableitung hat dann in  $x_0$  eine Extremstelle. Die Ableitung der Ableitung ist dort also gleich Null.

**Definition 5.8**

Sei  $f : D \rightarrow K$  differenzierbar in  $D$  und  $x_0 \in D$ .

Ist  $f' : D \rightarrow K$  differenzierbar (in  $x_0$ ), so heißt  $f$  *2-mal differenzierbar* (in  $x_0$ ); man schreibt  $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ .

Entsprechend spricht man von *3-mal, ..., n-mal differenzierbar*.

Die  $n$ -te Ableitung wird mit  $f^{(n)}$  bezeichnet, speziell  $f^{(2)} = f''$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(0)} = f$ .

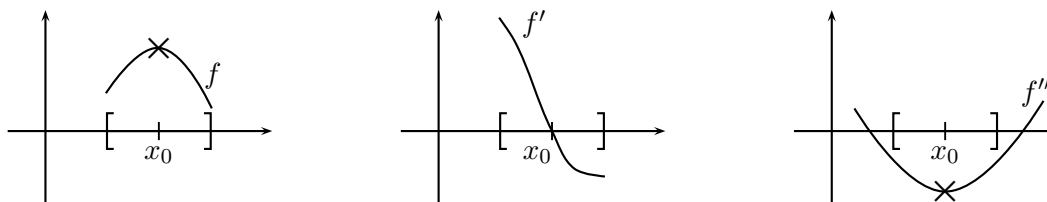
Im Alltag begegnet man der 2. Ableitung in Form der Beschleunigung: Ist  $s(t)$  der zurückgelegte Weg zur Zeit  $t$ , so ist  $s'(t)$  die Geschwindigkeit und  $s''(t)$  die Beschleunigung (in der Physik  $\ddot{s}$ ).

**Satz 5.9**

Ist  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal stetig differenzierbar und gilt für ein  $x_0 \in ]a, b[$ , dass  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \lessgtr 0$  ist, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum  
Minimum.

**Bemerkung:**

Die folgenden Bilder zeigen einen typischen Verlauf von  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  :

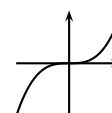
**Satz 5.10**

Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal differenzierbar.

1. Ist  $f''(x) \leq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so ist  $f$  rechtsgekrümmt (konkav) linksgekrümmt (konvex).
2. Ist  $f$  sogar 3-mal stetig differenzierbar,  $x_0 \in ]a, b[$  mit  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$ , so ändert sich das Krümmungsverhalten in  $x_0$ .  $x_0$  heißt dann Wendestelle.

**Bemerkung:**

Eine Wendestelle  $x_0$  mit  $f'(x_0)$  heißt auch *Sattelstelle*, z.B.  $x_0 = 0$  bei  $f(x) = x^3$ .



Eine Kurvendiskussion dient dazu, sich ein Bild von einer Funktion zu machen.

Dazu bestimmt man:

- ggf. den maximal möglichen Definitionsbereich,
- die Nullstellen,
- die Extremstellen,
- die Wendepunkte,
- das Krümmungsverhalten,
- ggf. die Grenzwerte bei isolierten nicht definierten Stellen bzw. die Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs.

**Beispiel 1:**  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- Definitionsbereich:  $D = \mathbb{R}$ .
- Nullstellen:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- Es ist  $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ .

Da  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle, dass  $f'(x) = 0$  ist, d.h.  $-x^2 + 1 = 0$  also  $x = \pm 1$ .

Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) + (x^2-1) \cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f''(1) &= \frac{-4}{2^3} < 0 \stackrel{\text{Satz 5.9}}{\Rightarrow} 1 \text{ ist Maximalstelle mit Wert } f(1) = \frac{1}{2}. \\ f''(-1) &= \frac{4}{2^3} > 0 \quad -1 \text{ ist Minimalstelle mit Wert } f(-1) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

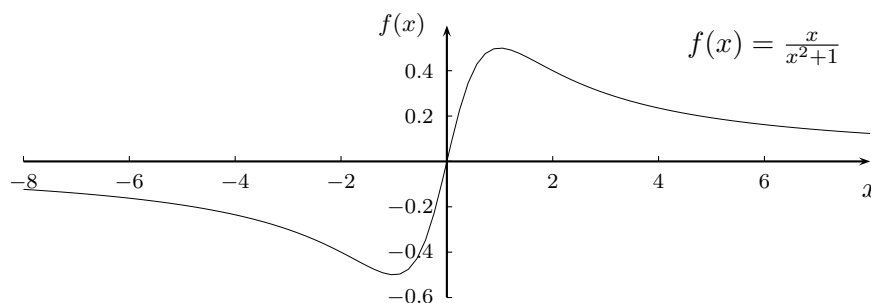
- Kandidaten für Wendestellen sind die Nullstellen von  $f''$ :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Man kann nachrechnen, dass  $f'''$  an diesen Stellen ungleich Null ist.

Satz 5.10 besagt dann, dass 0 und  $\pm\sqrt{3}$  Wendestellen sind mit den Werten  $f(0) = 0$  und  $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

- Für  $x \rightarrow \infty$  ist  $f''(x) > 0$ . Da die Wendestellen genau die Stellen sind, an denen sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert, folgt:
  - für  $x > \sqrt{3}$  ist  $f''(x) > 0$ , also  $f$  linksgekrümmt,
  - für  $0 < x < \sqrt{3}$  ist  $f''(x) < 0$ , also  $f$  rechtsgekrümmt,
  - für  $-\sqrt{3} < x < 0$  ist  $f''(x) > 0$ , also  $f$  linksgekrümmt,
  - für  $x < -\sqrt{3}$  ist  $f''(x) < 0$ , also  $f$  rechtsgekrümmt.
- Es ist  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .



Literatur: [Dürr] 12.1; 12.2; 12.4; [Rie] 7.3; [Pap1] IV.2.10, IV.3.3, IV.3.4, IV.3.5

Übungen: [Stingl] 7.6, 17,18,19,20,21,23,24,25; [Dürr] 12.1, 2; 12.2, 1,2,3,4,5,6,7,8,9; 12.4, 1,2; [RieÜ] 7.7, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.19; [PapÜ] B70-B93

## 5.4. Anwendungen

### 5.4.1. Die Regel von De L'Hospital

Ziel dieses Abschnittes ist es, Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  bereitzustellen, falls  $\frac{f(a)}{g(a)}$  von der Art  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  ist, z.B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

Betrachte den Fall  $f(a) = 0 = g(a)$ . Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (\text{falls } g'(a) \neq 0),$$

also z.B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$ .

**Satz 5.11** (Regel von De L'Hospital)

Sei  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = \pm\infty$  und

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Sind  $f$  und  $g$  differenzierbar und  $g' \neq 0$  in der Nähe von  $a$  ( $x \neq a$ ), so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert ( $\pm\infty$  als Wert zugelassen).

Entsprechendes gilt bei einseitigen Grenzwerte.

**Beispiel 1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Falls der rechte Grenzwert im Satz 5.11 nicht existiert, kann man nicht daraus schließen, dass auch der linke nicht existiert!

**Beispiel 2:**

Sei  $f(x) = x + \sin x$ ,  $g(x) = x$  und  $a = \infty$ .

Dann ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$  nicht existent, aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \text{ existiert.}$$

**Bemerkung:**

Grenzwerte von  $f(x) \cdot g(x)$  vom Typ  $0 \cdot \infty$  können in der Form  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

(Typ  $\frac{0}{0}$ ) oder  $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  (Typ  $\frac{\infty}{\infty}$ ) behandelt werden.

**Beispiel 3:**

Bestimmung von  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ , also  $f(x) = x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  und

$g(x) = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$  :

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\text{Satz 5.11}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{-\frac{1}{x^2}}{(\ln x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x(\ln x)^2) \dots (\text{bringt nichts}) \end{aligned}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Satz 5.11}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Literatur: [Dürr] 12.5; [Rie] 7.4

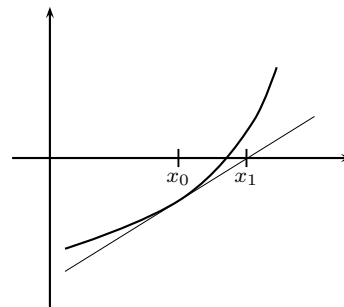
Übungen: [Stingl] 7.6, 5; [Dürr] 12.5, 1,2; [RieÜ] 7.16; [PapÜ] B98-B104

### 5.4.2. Das Newton Verfahren

Bei einer differenzierbaren Funktion kann der Funktionsgraph durch Tangenten approximiert werden. Dies kann man zur Berechnung von Nullstellen ausnutzen:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0$  liege „in der Nähe“ einer Nullstelle von  $f$ . Die Nullstelle der Tangente an den Funktionsgraph in  $x_0$  liefert eine neue Näherung  $x_1$ . Die Tangente wird beschrieben durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Für  $x_1$  muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ \Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= x_1 - x_0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Dies kann man nun iterieren:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

#### Beispiel 1:

Gesucht ist eine Nullstelle von  $f(x) = x^2 - 4$ .

Erste Näherung:  $x_0 = 1$ .

Es ist  $f'(x) = 2x$ , also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 4}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 4)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}.$$

Damit ist  $x_1 = \frac{1^2+4}{2 \cdot 1} = 2.5$ ,  $x_2 = 2.05$ ,  $x_3 \approx 2.0006$ ,  $x_4 \approx 2.00000009$ .

#### Bemerkungen:

1. Das Newton-Verfahren konvergiert nicht immer. Wenn es konvergiert, dann meistens sehr schnell.
2. Mit dem Newton-Verfahren kann man auch andere Probleme, z.B. das Finden eines  $x$  mit  $x \cdot e^x = 1$ , lösen, indem sie geeignet umgestellt werden:

$$x \cdot e^x = 1 \Leftrightarrow x \cdot e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Newton-Verfahren mit } f(x) = x \cdot e^x - 1.$$

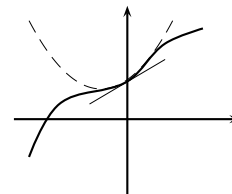
Literatur: [Dürr] 12.6; [Rie] 7.4; [Pap1] IV.3.6

Übungen: [Dürr] 12.6, 1,2; [RieÜ] 7.15; [PapÜ] B96, B97

### 5.4.3. Taylorpolynome und -reihen

Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so lässt sich der Graf in der Nähe von  $x_0$  durch eine Gerade approximieren z.B. bei  $x_0 = 0$ :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x.$$



Erlauben höhere Ableitungen noch bessere Approximationen?

Ansatz für eine Approximation durch ein Polynom höherer Ordnung:

$$f(x) \approx f(0) + bx + cx^2 + dx^3 := p(x).$$

Wähle  $p$  so, dass mehrfache Ableitungen von  $p$  mit denen von  $f$  in 0 übereinstimmen:

$$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$

$$p''(x) = 2c + 3 \cdot 2 \cdot dx$$

$$p'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot d, \text{ also}$$

$$f'(0) = p'(0) = b$$

$$f''(0) = p''(0) = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}f''(0)$$

$$f'''(0) = p'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot d \Rightarrow d = \frac{1}{3!}f'''(0).$$

#### Definition 5.12

Sei  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow K$   $n$ -mal differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_{n;x_0}(x) &= T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

$n$ -tes Taylorpolynom zu  $f$  in  $x_0$ .

#### Bemerkung:

Speziell für  $n = 1$  erhält man die Tangentengleichung als *lineare Näherung* :

$$f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Mit  $\Delta x = x - x_0$  kann man dies auch schreiben als

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Für  $n = 2$  erhält man eine Parabel.

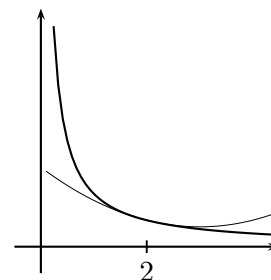
**Beispiel 1:**

Das 2. Taylorpolynom zu  $f(x) = \frac{1}{x}$  in 2 ist wegen  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 4) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2. \end{aligned}$$

Damit gilt tatsächlich:

$$\begin{aligned} T_2(2) &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(2), \\ T_2'(2) &= -\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = -\frac{1}{4} = f'(2), \\ T_2''(2) &= \frac{1}{4} = f''(2). \end{aligned}$$



Für steigendes  $n$  erhält man Polynome immer höheren Grades und auf diese Weise quasi eine Potenzreihe. Man nennt diese Reihe *Taylorreihe*. In vielen Fällen konvergiert diese Reihe und stellt die ursprüngliche Funktion dar.

**Beispiel 2:**

$f(x) = e^x$ . Wegen  $f^{(n)}(x) = e^x$  erhält man als Taylorreihe zu  $x_0 = 0$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Die Potenzreihen-Darstellung einer Funktion entspricht der Taylorreihe in  $x_0 = 0$ . Man nennt diese Reihe auch *Maclaurinsche Reihe* zu  $f$ . Das  $n$ -te Taylorpolynom in  $x_0 = 0$  entspricht der nach  $x^n$  abgeschnittenen Potenzreihe.

Wie nahe ist  $T_n(x)$  der Funktion  $f(x)$ ?

**Satz 5.13**

Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal differenzierbar,  $x_0 \in ]a, b[$  und  $T_n(x)$  das  $n$ -te Taylorpolynom zu  $f$  in  $x_0$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in ]a, b[$  ein  $\vartheta$  zwischen  $x_0$  und  $x$  mit  $f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$ .

**Bemerkung:**

Der Satz wird meist in der folgenden Form benutzt:

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \quad \text{für ein } \vartheta \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x.$$

**Beispiel 3** (Fortsetzung von Beispiel 1):

Wie gut ist die Näherung  $T_2(x)$  für  $x \in [1.5, 2.5]$ ?

Es ist  $f'''(x) = -6 \cdot \frac{1}{x^4}$ .

Nach Satz 5.13 gibt es für jedes  $x \in [1.5, 2.5]$  ein  $\vartheta$  zwischen 2 und  $x$  (also insbesondere  $\vartheta > 1.5$ ) mit  $f(x) = T_2(x) + \frac{f'''(\vartheta)}{3!} (x - 2)^3$ , also

$$|f(x) - T_2(x)| = \left| \frac{1}{3!} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\vartheta^4} \cdot (x - 2)^3 \right| \leq \frac{1}{1.5^4} \left( \frac{1}{2} \right)^3 \leq 0.025.$$

Taylorpolynome stellen in der Nähe von  $x_0$  meist (sehr) gute Näherungen für  $f$  dar.

Literatur: [Rie] 9.4; [Pap1] VI.3.2, VI.3.3

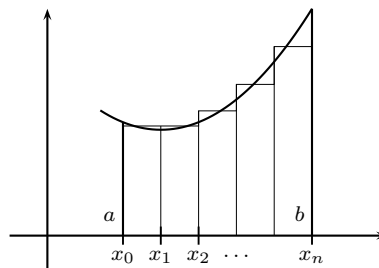
Übungen: [Stingl] 7.6, 9,10; [Dürr] 18.2, 2,3; [RieÜ] 9.8, 9.9, 9.10; [PapÜ] D9-D13, D15, D17, D18, D20-D28

## 6. Integralrechnung

### 6.1. Definition des Integrals und elementare Eigenschaften

Das Ziel der Integralrechnung ist die Berechnung der Fläche unter einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Idee: Approximation durch Rechtecke, genauer:  
Die  $x$ -Achse wird in kleine Abschnitte eingeteilt. In diesen Abschnitten werden jeweils Rechtecke betrachtet mit einer Höhe, die in etwa der des Funktionsgraphen entspricht.



#### Definition 6.1

Eine *Zerlegung*  $Z$  von  $[a, b]$  wird gebildet durch Punkte  $x_k$  mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$  ist die Länge des  $k$ -ten Teilintervalls.

$\Delta Z := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$  heißt *Feinheit* der Zerlegung.

Bei einer braven Funktion kann man als Höhe des approximierenden Rechtecks in dem Intervall  $[x_{k-1}, x_k]$  den Funktionswert an einer Zwischenstelle  $\widehat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$  nehmen. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist dann  $(x_k - x_{k-1}) \cdot f(\widehat{x}_k)$ .

#### Definition 6.2

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und Zwischenstellen  $\widehat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$  gewählt. Dann heißt

$$S(f, Z, \widehat{x}_k) := \sum_{k=1}^n f(\widehat{x}_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{Riemannsches Zwischensumme.}$$

#### Definition 6.3

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar

$:\Leftrightarrow$  für jede Folge  $Z_n$  von Zerlegungen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta Z_n = 0$  und entsprechend  $Z_n$

gewählten Zwischenstellen  $\widehat{x}_k^{(n)}$  existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n, \widehat{x}_k^{(n)})$ .

Dieser Grenzwert ist dann gleich  $\int_a^b f(x) dx$  („Integral von  $a$  bis  $b$  über  $f$ “).

#### Bemerkungen:

1. Das wie oben definierte Integral heißt auch *Riemann-Integral*.

2. Falls  $f$  integrierbar ist, ist der Grenzwert der Zwischensummen tatsächlich eindeutig.
3. Eine Riemannsche Zwischensumme kann man zur numerischen Berechnung eines Integrals benutzen:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(\widehat{x}_k) \cdot \Delta x_k.$$

4. Statt der Integrationsvariablen  $x$  bei  $\int_a^b f(x) dx$  kann man auch andere Bezeichner wählen, z.B.  $\int_a^b f(t) dt$ .

**Beispiel 1:**

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c.$$

Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ ,  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,

also  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und

$\widehat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$  entsprechende Zwischenstellen.

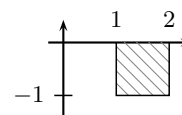
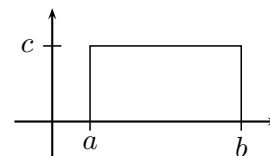
Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(f, Z, \widehat{x}_k) &= \sum_{k=1}^n f(\widehat{x}_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot (x_k - x_{k-1}) = c \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c \cdot ((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) \\ &= c \cdot (-x_0 + x_n) \\ &= c \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Also ist  $f$  integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a)$ .

Zu  $f(x) = -1$  ist beispielsweise  $\int_1^2 f(x) dx = (-1) \cdot (2 - 1) = -1$ .

(Eine Fläche unterhalb der  $x$ -Achse wird negativ gewertet.)

**Satz 6.4**

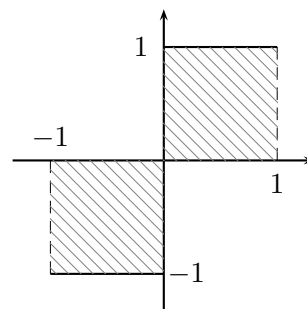
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig  $\Rightarrow f$  ist integrierbar.

**Bemerkung:**

Satz 6.4 gilt allgemeiner für stückweise stetige Funktionen, d.h. Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen, zwischen denen die Funktion stetig ist, z.B.:

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Es ist } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

**Beispiel 2:**

Vorüberlegung:

$$\text{Es gilt: } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Sei nun  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ .

Da  $f$  stetig ist, existiert  $\int_0^1 f(x) dx$  nach Satz 6.4 und kann entsprechend der Definition mit einer Folge von Zerlegungen und entsprechenden Zwischenpunkten berechnet werden.

Berechnung:

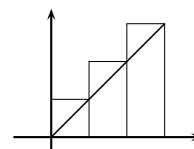
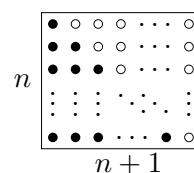
Betrachte die äquidistante Zerlegung  $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ ,

also  $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n$ . Dann ist  $\Delta x_k^{(n)} = \frac{1}{n}$ .

Setze  $\widehat{x}_k^{(n)} = x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} S(f, Z_n, \widehat{x}_k^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} \cdot \Delta x_k^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

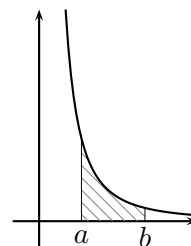
$$\text{Also ist } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$



**Beispiel 3:**

$f(x) = \frac{1}{x^2}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^{>0}$ , also für jedes  $0 < a < b$  stetig auf  $[a, b]$ , so dass  $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$  existiert.

Berechnung des Integrals mit Riemanschen Zwischensummen:  
Sei durch  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  eine Zerlegung  $Z$  gegeben.  
Wähle  $\widehat{x}_k := \sqrt{x_{k-1} \cdot x_k} \in [x_{k-1}, x_k]$  (geometrisches Mittel von  $x_{k-1}$  und  $x_k$ ).



Damit ist:

$$\begin{aligned} S(f, Z, \widehat{x}_k) &= \sum_{k=1}^n f(\widehat{x}_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_{k-1} \cdot x_k}^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} \cdot x_k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \right) \\ &= \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) + \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Also ist  $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ .

**Definition 6.5**

Sei  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $b = \infty$  zugelassen) und für jedes  $c \in ]a, b[$  existiere  $\int_a^c f(x) dx$ .

Dann heißt  $\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$  *uneigentliches Integral* von  $f$ , falls dieser Grenzwert existiert (entsprechend für die Untergrenze  $a$ ).

**Beispiel 4:**

$$1. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{c} \right) = 1$$

$\Rightarrow$  das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  existiert.

$$2. \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{1} \right) \quad (\text{nicht existent in } \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$  das uneigentliche Integral  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  existiert nicht in  $\mathbb{R}$ .

**Definition 6.6**

Für  $a < b$  setzt man  $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$  und  $\int_a^a f(x) dx := 0$ .

**Satz 6.7** (Rechenregeln)

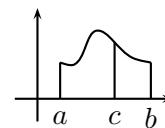
Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so gilt:

1. Für  $c \in [a, b]$  ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

3.  $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$

**Beispiel 5:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x + 3) dx &= \int_0^1 2x dx + \int_0^1 3 dx = 2 \cdot \int_0^1 x dx + \int_0^1 3 dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (1 - 0) = 4. \end{aligned}$$

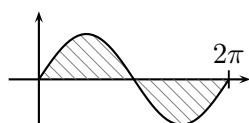
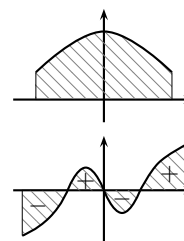
**Bemerkung:**

Oft kann man Symmetrien bei der Integralberechnung ausnutzen:

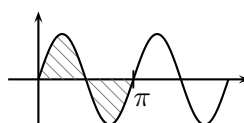
1.  $f$  gerade  $\Rightarrow \int_{-c}^c f(x) dx = 2 \cdot \int_0^c f(x) dx$

2.  $f$  ungerade  $\Rightarrow \int_{-c}^c f(x) dx = 0$

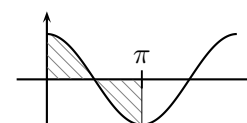
3. Die Symmetrien von  $\sin x$  und  $\cos x$  ergeben z.B.



$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$



$$\int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0$$



$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0$$

Literatur: [Stingl] 8.1; [Dürr] 14.1; [Rie] 8.1; [Pap1] V.2

## 6.2. Integration als Umkehrung der Differenziation

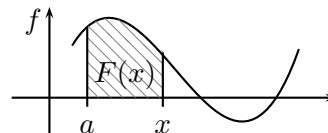
**Satz 6.8** (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $a, x \in I$  und  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ .

Dann ist  $F$  differenzierbar und  $F' = f$ .

**Bemerkung:**

Der Satz besagt anschaulich, dass die Wachstumsrate von  $F$  der Größe von  $f$  entspricht.



**Definition 6.9**

Eine Funktion  $F$  heißt *Stammfunktion* zu  $f$   $:\Leftrightarrow F' = f$ .

**Bemerkung:**

Zu  $f$  gibt es keine eindeutige Stammfunktion. Mit  $F$  ist auch  $G(x) = F(x) + c$  eine Stammfunktion.

**Beispiel 1:**

$(x^2)' = 2x$  also  $(\frac{1}{2}x^2)' = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2$  ist Stammfunktion zu  $f(x) = x$ .

**Beispiel 2:**

$F_1(x) = \ln x$  besitzt die Ableitung  $F_1'(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ).

$F_2(x) = \ln(-x)$  besitzt die Ableitung  $F_2'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$  ( $x < 0$ ).

Damit gilt: Für  $x \neq 0$  ist  $F(x) = \ln|x|$  Stammfunktion zu  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Satz 6.10** (Integralberechnung)

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b.$$

**Beispiel 3:**

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

**Bemerkung:**

Wegen Satz 6.10 bezeichnet man eine beliebige Stammfunktion von  $f$  auch mit  $\int f(x) dx$  oder kurz  $\int f$  („unbestimmtes Integral von  $f$ “), z.B.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ .

## Übersicht über wichtige Stammfunktionen

$\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{R}^{\neq -1})$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
$\int \frac{1}{x} = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \sin x = -\cos x + c$	$\int \sinh x = \cosh x + c$
$\int \cos x = \sin x + c$	$\int \cosh x = \sinh x + c$
$\int e^x = e^x + c$	$\int a^x = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

Durch Satz 6.10 wird die (analytische) Integration zurückgeführt auf die Suche nach einer Stammfunktion, also die Umkehrung der Differenziation (*Aufleiten*). Damit erhält man durch die Ableitungsregeln „Tricks“ zum Auffinden einer Stammfunktion.

Literatur: [Stingl] 8.2; [Dürr] 13.1, 14.2; [Rie] 8.1; [Pap1] V.3, V.4, V.5, V.6, V.7

Übungen: [Dürr] 13.1, 2,3; 14.2, 1,3,4; 14.3, 1,2,3; [RieÜ] 8.1, 8.2, 8.3, 8.10, 8.11

**6.2.1. Partielle Integration** (Umkehrung der Produktregel)

Seien  $f, g$  stetig mit Stammfunktionen  $F, G$ . Dann ist  $F \cdot G$  Stammfunktion zu

$$(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G' = f \cdot G + F \cdot g, \text{ also gilt:}$$

$$F \cdot G = \int f \cdot G + \int F \cdot g$$

Daraus folgt:

**Satz 6.11** (partielle Integration)

Sind  $f, g$  stetig mit Stammfunktionen  $F, G$ , so gilt:

$$\int f \cdot G = F \cdot G - \int F \cdot g,$$

$$\text{bzw. } \int_a^b f(x)G(x) dx = F(x) \cdot G(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx.$$

**Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin x) \cdot x dx &= (-\cos x) \cdot x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \cdot 1 dx \\ &= (-\cos x) \cdot x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= ((-\cos \pi) \cdot \pi - 0) + \sin x \Big|_0^\pi \\ &= (-(-1)) \cdot \pi + (\sin \pi - 0) = \pi \end{aligned}$$

**Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1) \end{aligned}$$

Bei Berechnung einer Stammfunktion bietet es sich an, das Ergebnis durch Ableiten auf seine Richtigkeit hin zu prüfen:

$$(x \cdot (\ln x - 1))' = (\ln x - 1) + x \left( \frac{1}{x} - 0 \right) = \ln x - 1 + 1 = \ln x,$$

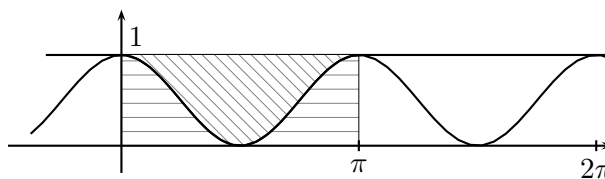
die Stammfunktion ist also korrekt.

**Beispiel 3:**

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) \, dx \\
&= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx \\
&= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2)x \, dx \\
&= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \\
\Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cdot \cos x + x \\
\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x \cdot \cos x + x)
\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Den Wert von  $\int_a^b \cos^2 x \, dx$  bei speziellen Werten von  $a$  und  $b$  kann man auch aus Symmetrieüberlegungen bestimmen, z.B. bei  $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ :



Es ist  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ . Wegen der Symmetrie von  $\cos x$  und  $\sin x$  wird das Rechteck  $[0, \pi] \times [0, 1]$  durch den Grafen zu  $\cos^2$  genau halbiert, so dass sich sofort ergibt:

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\pi \cdot 1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Literatur: [Dürr] 13.2.1; [Rie] 8.2; [Pap1] V.8.2

Übungen: [Stingl] 8.3, 1; [Dürr] 13.2, 1; [RieÜ] 8.4; [PapÜ] C16-C20

**6.2.2. Substitution** (Umkehrung der Kettenregel)

Sei  $f$  stetig mit Stammfunktion  $F$  und  $g$  stetig differenzierbar. Dann ist  $F \circ g$  Stammfunktion zu  $(F \circ g)' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$ , also:

$$\int f(g) \cdot g' = F \circ g = F(g)$$

$$\text{bzw. } \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

**Beispiel 1:**

Zu  $f(x) = x$  ist  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  und so ergibt die Substitutionsformel:

$$\int g \cdot g' = F(g) = \frac{1}{2}g^2,$$

$$\text{z.B. } \int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

**Beispiel 2:**

Zu  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist  $F(x) = \ln|x|$  und so ergibt die Substitutionsformel:

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g|.$$

**Satz 6.12** (Substitution)

Sei  $f$  stetig mit Stammfunktion  $F$  und  $g$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt, \text{ und } \int f(g) \cdot g' = F(g).$$

$$\text{Insbesondere } \int g \cdot g' = \frac{1}{2}g^2, \quad \int \frac{g'}{g} = \ln|g|.$$

*Merkregel:* Ersetze  $t = g(x)$  und  $dt = g'(x) dx$ .

**Beispiel 3:**

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x} (-\sin x) dx = -\ln|\cos x|$$

Mit der Merkregel führt man die Ersetzung  $t = \cos x$ , also  $dt = -\sin x dx$ , aus, also

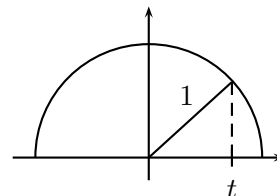
$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x} (-\sin x) dx \stackrel{\substack{t = \cos x \\ dt = -\sin x dx}}{=} \int \frac{-1}{t} dt = -\ln |t|.$$

Rücksubstitution führt dann auf  $-\ln |\cos x|$ .

#### Beispiel 4:

Berechnung der Fläche des Einheitskreises:

Die Funktion  $t \rightarrow \sqrt{1-t^2}$  beschreibt einen Halbkreis mit Radius 1. Gesucht ist also  $2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ .



Idee: Nutze  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ , d.h. setze  $t = \sin x = g(x)$ , und damit  $dt = \cos x dx$ .

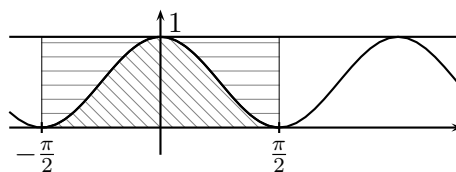
Für die neuen Grenzen  $a, b$  muss gelten:  $g(a) = -1$  und  $g(b) = 1$

$\Rightarrow a = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$  und  $b = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt &\stackrel{\substack{t = \sin x \\ dt = \cos x dx}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 x}}_{\cos^2 x} \cdot \cos x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

Symmetrieüberlegungen ergeben

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$



(vgl. Abschnitt 6.2.1, Beispiel 3).

Die Fläche eines Kreises mit Radius 1 ist also gleich  $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ .

#### Bemerkung:

Während man zu jeder Zusammenstellung elementarer Funktionen mit den Ableitungsregeln eine elementare Ableitung erhält, gibt es elementare Funktionen die *keine* elementare Stammfunktion besitzen, z.B.  $e^{-x^2}$ .

Literatur: [Dürr] 13.2.2; [Rie] 8.2; [Pap1] V.8.1

Übungen: [Stingl] 8.3, 4; [Dürr] 13.2, 2; [RieÜ] 8.5, 8.6, 8.7, 8.8; [PapÜ] C1, C2, C3, C10

### 6.2.3. Ausprobieren

Statt durch eine Substitution kommt man oft auch durch Ausprobieren zu einer Stammfunktion.

#### Beispiel 1:

Betrachte  $\int \sin(2x) dx$ .

Die Stammfunktion wird irgendetwas mit  $\cos(2x)$  zu tun haben. Es gilt

$$\begin{aligned}(\cos(2x))' &= -2 \cdot \sin(2x) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{-2} \cdot \cos(2x)\right)' &= \frac{1}{-2} \cdot (-2) \cdot \sin(2x) = \sin(2x)\end{aligned}$$

Also ist  $\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x)$ .

### 6.2.4. Partialbruch-Zerlegung

Man kann sich überlegen, dass man eine gebrochen rationale Funktion immer durch Partialbruchzerlegung integrieren kann.

#### Beispiel 1:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

Es ist  $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$  (s. Abschnitt 1.1.4 Beispiel 2 und 4)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} dx &= \int \left( x - 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x - \ln|x+1| + 2 \cdot \frac{-1}{x+1}.\end{aligned}$$

Literatur: [Dürr] 13.2.3; [Pap1] V.8.8.3; [Rie] 8.3

Übungen: [Stingl] 8.3, 15; [Dürr] 13.2, 3; [RieÜ] 8.9; [PapÜ] C24-C28

## 7. Vektorrechnung

### 7.1. Vektoren und Vektorraum

Interpretation eines Zahlenpaars (2-Tupel)  $(a_1, a_2)$

- als Punkt in der Ebene (bei festgelegtem Koordinatensystem)
- als Pfeil

Addition durch Aneinander hängen

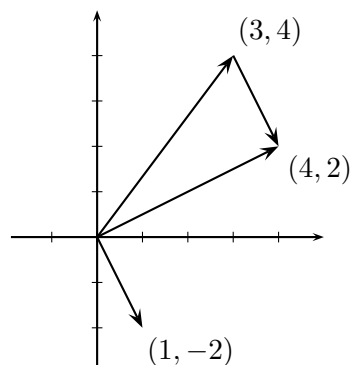
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Schreibweise auch in Spalten:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

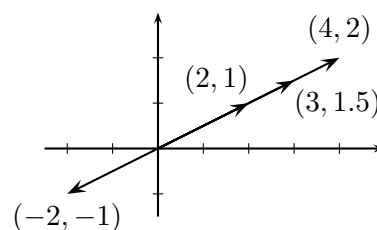
**Beispiel 1:**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Skalierung:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

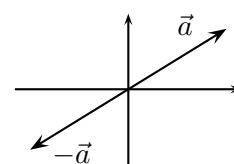
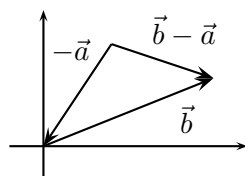
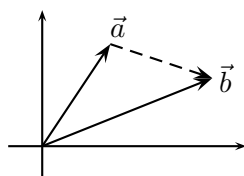


**Beispiel 2:**

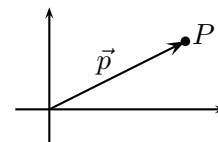
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist  $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$  der rückwärts gewandte (inverse) Pfeil.

Der Differenzpfeil von  $\vec{a}$  zu  $\vec{b}$  ergibt sich als  $-\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$ .



Oft wird nicht genau zwischen einem Punkt  $P$  im Anschauungsraum und dem zugehörigen *Ortsvektor*  $\vec{p}$  unterschieden.



Punkte bzw. Pfeile im Raum kann man durch 3-Tupel beschreiben und entsprechend addieren und skalieren. Allgemein:

**Definition 7.1**

Im  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  wird eine *Addition* und eine *skalare Multiplikation* definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Will man den Pfeil-Charakter betonen, schreibt man  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , sonst auch nur  $a \in \mathbb{R}^n$ . Statt  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  schreibt man auch  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  oder nur  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Auch Polynome kann man addieren und skalieren:

**Beispiel 3:**

Sei  $p(x) = x^4 + 2x - 1$ ,  $q(x) = x^2 + 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (p+q)(x) &= x^4 + x^2 + 2x + 2, \\ (2p)(x) &= 2x^4 + 4x - 2. \end{aligned}$$

Man definiert daher allgemein:

**Definition 7.2**

Ein *Vektorraum* ist eine Menge  $V$  mit einer Addition  $+$  und einer skalaren Multiplikation  $\cdot$ , so dass

- mit  $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch  $\vec{a} + \vec{b} \in V$  und  $\lambda \cdot \vec{a} \in V$  ist
- bzgl.  $+$  und  $\cdot$  die üblichen Rechenregeln gelten.

Die Elemente von  $V$  heißen *Vektoren*.

**Bemerkung:**

„Übliche Rechenregeln“ heißt:

1. zu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$  gilt  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  und  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$   
(*Kommutativität und Assoziativität*),
2. es gibt ein ausgezeichnetes Element  $\vec{0} \in V$  mit  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  für jedes  $\vec{a} \in V$   
(*Existenz eines neutralen Elements*),
3. zu jedem  $\vec{a} \in V$  gibt es ein inverses Element  $-\vec{a}$  mit  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$   
(*Existenz inverser Elemente*),

4. zu  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  gilt  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ ,  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$   
(Distributivität),
5. zu  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \in V$  gilt  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ ,  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$   
(Verträglichkeit der Multiplikationen).

**Beispiel 4:**

- a)  $\mathbb{R}^n$ , insbesondere  $\mathbb{R}^2$  (Ebene) und  $\mathbb{R}^3$  (Raum) sind Vektorräume.
- b) Die Menge aller Polynome ist ein Vektorraum.
- c)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$  bildet mit der aus  $\mathbb{R}^2$  übernommenen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum.

**Beispiel 5:**

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$  bildet mit der aus  $\mathbb{R}^2$  übernommenen Addition und skalaren Multiplikation keinen Vektorraum, denn

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V, \text{ aber } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin V.$$

Literatur: [Stingl] 5.1; [Dürr] 5.1, 5.2; [Rie] 2.1, 2.2; [Pap1] II.2.1, II.2.2, II.3.1, II.3.2

Übungen: [Stingl] 5.1, 2; [Dürr] 5.2, 2; [RieÜ] 2.1

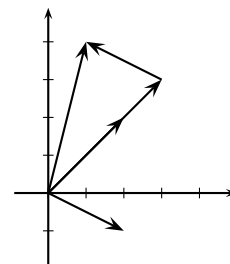
## 7.2. Linearkombination und Basis

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  kann dargestellt werden als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder mit Hilfe von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



### Definition 7.3

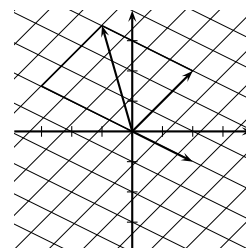
Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  und  $\vec{v}_k \in V$ . Dann heißt

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

*Linearkombination* der  $\vec{v}_k$ .

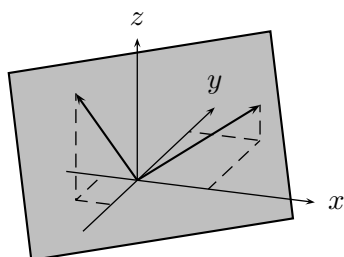
### Beispiel 1:

Jedes  $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$  lässt sich als Linearkombination von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  darstellen.



### Beispiel 2:

Die Menge aller Linearkombinationen zweier verschiedener Vektoren, die nicht auf einer Linie liegen, bilden eine Ebene.



### Beispiel 3:

Mit drei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ , die nicht in einer Ebene liegen, kann man jedes  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  darstellen.

**Definition 7.4**

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  heißt  $Basis$  von  $V$   $\Leftrightarrow$  jedes  $\vec{v} \in V$  lässt sich eindeutig als Linearkombination von  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  darstellen.

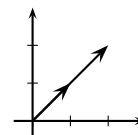
$n$  heißt dann *Dimension* von  $V$ .

**Beispiel 4:**

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^2$ , ebenso  $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ .

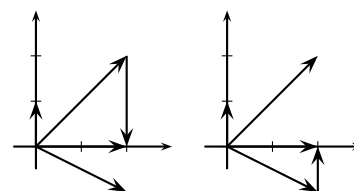
**Beispiel 5:**

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  ist keine Basis von  $\mathbb{R}^2$ .

**Beispiel 6:**

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  ist keine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , da z.B.:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



die Darstellung ist also nicht eindeutig.

**Bemerkungen:**

1. Man kann zeigen, dass alle Basen zu einem Vektorraum gleich viele Elemente haben.

**Beispiel 7:**

Im  $\mathbb{R}^2$  haben alle Basen zwei Elemente.  $\mathbb{R}^2$  ist zweidimensional.

2. Nicht jede Menge aus  $n$  Vektoren ist Basis eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums, siehe Beispiel 5.

Die  $n$  Vektoren müssen *linear unabhängig* sein.

3. Es gibt Vektorräume, die keine endliche Basis haben.

**Beispiel 8:**

Zur Menge aller Polynome ist  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^n | n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Basis.

4.  $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  bzw.  $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  heißt kanonische Basis von  $\mathbb{R}^2$  bzw. von  $\mathbb{R}^3$ , entsprechend für  $\mathbb{R}^n$ .

Literatur: [Stingl] 5.1; [Dürr] 5.4, 5.5

Übungen: [Stingl] 5.1, 4,5,6,17; [Dürr] 5.5, 1,2,3

### 7.3. Das Skalarprodukt

**Definition 7.5**

Zu  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  sei

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \vec{a} \vec{b} := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

das (*Standard-*) *Skalarprodukt*.

**Bemerkung:**

Das Skalarprodukt wird manchmal auch geschrieben als  $\langle a, b \rangle$ .

**Beispiel 1:**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 = -2.$$

**Beispiel 2:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

**Satz 7.6**

Zu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

1.  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$  und  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ,
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ,
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ,  
 $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$ .

**Bemerkungen:**

1. Wie in  $\mathbb{R}$  hat man Punkt-vor-Strich-Rechnung.  
 Man schreibt z.B.  $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  statt  $(\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ .

2. Die Eigenschaften sind leicht nach zurechnen, z.B.

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
 &= (a_1 + b_1) \cdot c_1 + \cdots + (a_n + b_n) \cdot c_n \\
 &= a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n + b_1 c_1 + \cdots + b_n c_n \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.
 \end{aligned}$$

**Definition 7.7**

Zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ist die (Standard-) Länge/Norm/Betrag definiert durch

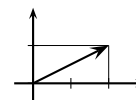
$$\|\vec{a}\| := |\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

**Bemerkung:**

Es ist also  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ .

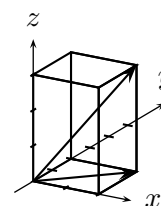
**Beispiel 3:**

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$



**Beispiel 4:**

$$\begin{aligned}
 \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} \\
 &= \sqrt{\sqrt{2^2 + 2^2}^2 + 3^2}.
 \end{aligned}$$



**Beispiel 5:**

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{17}.$$

**Satz 7.8**

Zu  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi,$$

wobei  $\varphi$  der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossene Winkel ist.

**Bemerkung:**

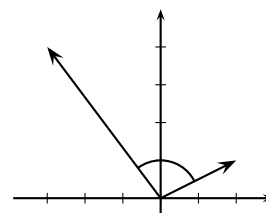
In  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  kann man Satz 7.8 elementar geometrisch herleiten. Im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , fehlt die Anschauung. Durch  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$  definiert man den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Beispiel 6:**

Zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} \approx -0.179 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi \approx \arccos(-0.179) \approx 1.75 \hat{=} 100^\circ.$$

**Beispiel 7:**

Zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \stackrel{\text{s. Bsp. 2}}{=} \frac{0}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = 0,$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ.$$

**Definition 7.9**

Zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  heißen *orthogonal* ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ )  $:\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

**Beispiel 8:**

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind orthogonal, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

**Beispiel 9:**

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  sind orthogonal (siehe Beispiel 7).

**Beispiel 10:**

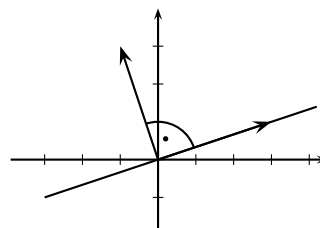
Welche Vektoren sind orthogonal zu  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

Allgemein: Zu  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  findet man einen orthogonalen Vektor durch Vertauschen der Komponenten und Vorzeichenwechsel in einer der beiden Komponenten.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot (-a_1) = 0.$$

$\Rightarrow$  Zu  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  orthogonal sowie sämtliche Vielfache:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left( \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

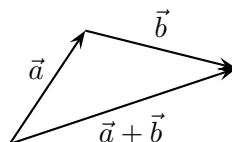
**Satz 7.10**

Für  $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$
2.  $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$  (Dreiecksungleichung)
3.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$  (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

**Bemerkungen:**

1. Die Dreiecksungleichung ist in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  anschaulich klar:



2. Wegen  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$  ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$  im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  klar. „=“ erreicht man bei  $\cos \varphi = 1$  bzw.  $\cos \varphi = -1$  also wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel sind bzw. in entgegengesetzte Richtungen zeigen („antiparallel“).

Merke: Bei vorgegebener Länge wird das Skalarprodukt maximal/minimal bei parallelen/antiparallelen Vektoren.

Literatur: [Dürr] 6.1; [Rie] 2.3; [Pap1] II.2.3, II.3.3

Übungen: [Dürr] 6.1, 1,2,3,4,6; [RieÜ] 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7; [PapÜ] H4a)

## 7.4. Das Vektorprodukt

Zu zwei linear unabhängigen Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  gibt es eine eindeutige Richtung, die zu den beiden Vektoren orthogonal ist. Einen Vektor in diese Richtung kann man direkt angeben:

### Definition 7.11

Zu  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  sei

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

das *Kreuz-* oder *Vektorprodukt*.

### Bemerkungen:

1. Das Skalarprodukt ist in jedem  $\mathbb{R}^n$  definiert. Das Vektorprodukt gibt es nur im  $\mathbb{R}^3$ .
2. Die Berechnung kann man sich auf zwei Weisen merken:
  - a) Zyklische Fortsetzung der Vektoren und kreuzweise Produkt-Differenz-Bildung

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & b_1 & \\
 a_2 & b_2 & \\
 a_3 & b_3 & \\
 a_1 & b_1 & \\
 a_2 & b_2 & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \longrightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \longrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array}
 \end{array}$$

- b) Kreuzweise Produkt-Differenz-Bildung bei Ausblenden einer Komponente und „-“ in der Mitte

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & - & - & - & b_1 & & \\
 a_2 & & & & b_2 & & \\
 a_3 & & & & b_3 & & \\
 & & & & & & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\
 \\ 
 a_1 & & & & b_1 & & \\
 a_2 & & & & -b_2 & & \\
 a_3 & & & & b_3 & & \\
 & & & & & & - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \\
 \\ 
 a_1 & & & & b_1 & & \\
 a_2 & & & & b_2 & & \\
 a_3 & - & - & - & - & b_3 & \\
 & & & & & & a_1 b_2 - a_2 b_1
 \end{array}$$

**Beispiel 1:**

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 2:**

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ -(5 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)) \\ 5 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

**Satz 7.12**

Seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  und  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$ . Dann gilt:

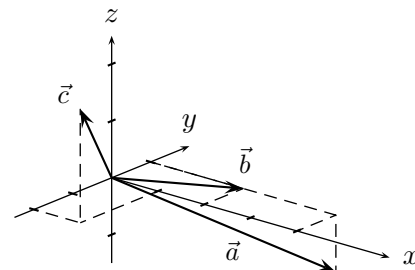
1.  $\vec{c}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .  
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bilden ein Rechtssystem.
2.  $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$ ,  
 wobei  $\varphi$  der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossene Winkel ist.

**Bemerkungen:**

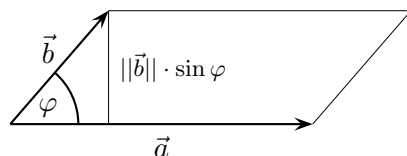
1. „Rechtssystem“ bedeutet, dass  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  in Richtungen wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand zeigen.

**Beispiel 3:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



2.  $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$  ist genau der Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms:



Merke: Bei vorgegebener Länge von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wird  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$  maximal, wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal sind.

Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel, so ist  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

**Beispiel 4:**

$$\text{Zu } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist } \vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Es ist } \vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$\text{und } \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Für den von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingeschlossenen Winkel  $\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{5}} \\ \Rightarrow \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{9^2}{18 \cdot 5}} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi &= \sqrt{18} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 5}{10}} = \sqrt{9} = 3 \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|. \end{aligned}$$

**Satz 7.13**

Zu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -(\vec{b} \times \vec{a}), \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Achtung: Es gilt *nicht*  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})!$

Literatur: [Dürr] 6.2; [Rie] 2.4; [Pap1] II.3.4

Übungen: [Dürr] 6.2, 2,3,6; [RieÜ] 2.9; [PapÜ] H4b)

## 7.5. Ebenen und Geraden

### 7.5.1. Darstellungsformen

Zwei nicht parallele Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  im  $\mathbb{R}^3$  ausgehend vom Ursprung spannen eine Ebene durch den Ursprung auf:

$$E_1 = \{\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Eine Ebene durch  $P \in \mathbb{R}^3$  erhält man durch Verschiebung:

$$E_2 = \{\vec{p} + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

(Parameter-Darstellung)

#### Beispiel 1:

Gesucht: Parameterdarstellung der Ebene  $E$  durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } \vec{v}_1 := \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \vec{v}_2 := \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

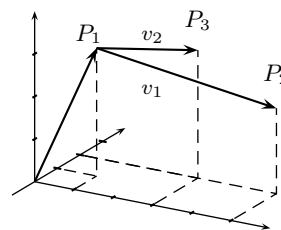
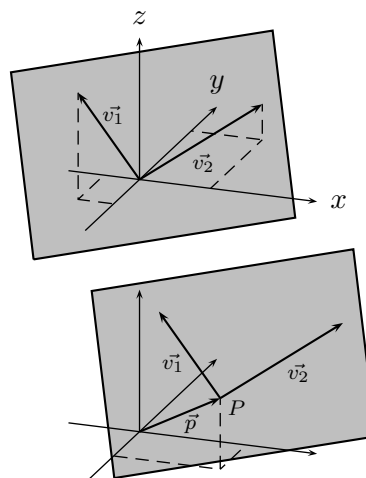
erhält man zwei Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \{\vec{p}_1 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Zu einer Ebene  $E$  im  $\mathbb{R}^3$  gibt es eine eindeutige senkrechte Richtung. Hat  $E$  die Richtungsvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  zeigt  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  in diese senkrechte Richtung (*Normalenvektor*).

#### Beispiel 2 (Fortsetzung von Beispiel 1):

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

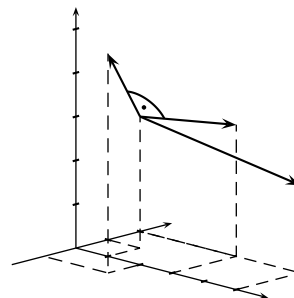


Durch einen Normalenvektor  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  und einen Punkt  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  ist eine Ebene  $E$  eindeutig bestimmt:

$$E = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{p}) \perp \vec{n}\}$$

**Beispiel 3** (Fortsetzung von Beispiel 2):

$$\begin{aligned} E &= \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \right\} \end{aligned}$$



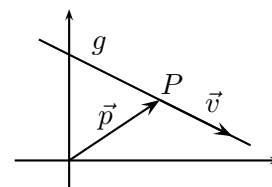
**Fazit:**

Durch  $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = r \right\}$  wird eine Ebene festgelegt (parameterfrei Form/Normalenform).  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  ist ein Normalenvektor von  $E$ .

Durch einen Punkt  $P$  und eine Richtung  $\vec{v}$  wird eine Gerade  $g$  festgelegt

$$g = \{ \vec{p} + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Dies gilt im  $\mathbb{R}^3$  und im  $\mathbb{R}^2$ , allgemein im  $\mathbb{R}^n$ .



### 7.5.2. Schnittpunkte

Berechnung von Schnittpunkten geschieht durch Einsetzen/Gleichsetzen der beschreibenden Ausdrücke

**Beispiel 1:**

Schnittpunkt von  $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  und  
 $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \right\}$   
 (vgl. Beispiel 1 bis 3 des vorigen Abschnitts).

1. Möglichkeit: Gleichungssystem für die Parameter:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4\alpha + 2\beta - \lambda = 0 \quad (\text{I})$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \quad (\text{II})$$

$$-\alpha - \lambda = -3 \quad (\text{III})$$

I - 2 · II + 2 · III ergibt  $-3\lambda = -6$ , also  $\lambda = 2$ .

$$\Rightarrow \text{Schnittpunkt bei } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit: Einsetzen der Geradendarstellung in die parameterfreie Ebenendarstellung:

$$(1 + \lambda \cdot 1) - 2(1 + \lambda \cdot 0) + 2(0 + \lambda \cdot 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow -1 + 3\lambda = 5$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \text{Schnittpunkt bei } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Im  $\mathbb{R}^2$  schneiden sich zwei nicht-parallele Geraden stets. Im  $\mathbb{R}^3$  können sie auch *windschief* liegen, d.h. keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

**Beispiel 2:**

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Suche nach einem Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

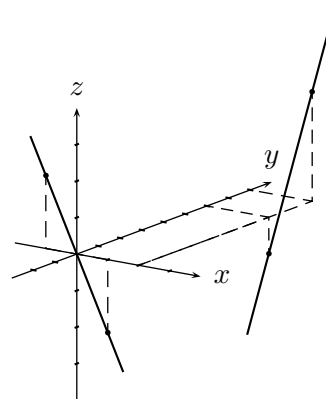
$$\lambda = 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \wedge 0 = 6 + 2\mu \quad (2)$$

$$\wedge -2\lambda = -1 + 4\mu \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = 2, \quad (2) \Rightarrow \mu = -3$$

$$\text{in (3): } -2 \cdot 2 = -1 + 4(-3) \quad \not\checkmark \text{ (Widerspruch)}$$



Literatur: [Dürr] 7.1, 7.2, 7.3, 7.5; [Pap1] II.4.1, II.4.

Übungen: [Dürr] 7.2, 1-7; 7.3, 1-6; 7.5, 1-6; [RieÜ] 2.14; [PapÜ] H18, H19, H24, H32, H37, H39

## 8. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

In diesem Kapitel sind  $x, y$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots$  (Notation ohne „ $\vec{\phantom{x}}$ “).

### 8.1. Grundlagen

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Entscheidend sind hier die Koeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Durch Ausprobieren sieht man, dass  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Lösung ist.

#### Definition 8.1

Eine *Matrix*  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist ein Zahlenschema bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $A \cdot x := Ax \in \mathbb{R}^m$  definiert durch

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### Bemerkung:

Man schreibt auch  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  oder kurz  $A = (a_{ij})$ .

**Beispiel 1:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2:**

Das lineare Gleichungssystem oben wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

kurz:  $Ax = b$ .

**Bemerkung:**

Bei der Matrix-Vektor-Multiplikation müssen die Dimensionen passen:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & x & = & b \\ \mathbb{R}^{m \times n} & & \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \\ & & n & & \\ m \begin{array}{|c|} \hline \phantom{x} \\ \hline \end{array} & \cdot & n \begin{array}{|c|} \hline \phantom{x} \\ \hline \end{array} & = & m \begin{array}{|c|} \hline \phantom{x} \\ \hline \end{array} \\ & & 1 & & 1 \end{array}$$

**Beispiel 3:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ geht nicht.}$$

**Satz 8.2**

Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$A \cdot (x \pm y) = Ax \pm Ay \quad \text{und} \quad A \cdot (\alpha x) = \alpha \cdot (Ax).$$

**Beispiel 4:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Definition 8.3**

Ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  heißt *homogen*, falls  $b = 0$  ist, ansonsten *inhomogen*.

**Beispiel 5:**

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist ein homogenes Gleichungssystem.

Eine Lösung ist  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Weitere Lösungen sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Sind  $x$  und  $y$  Lösungen des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$ , so folgt mit Satz 8.2

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

$$A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot Ax = \alpha \cdot 0 = 0.$$

d.h. auch  $x + y$  und  $\alpha \cdot x$  sind Lösungen.

**Satz 8.4**

Ein lineares homogenes Gleichungssystem besitzt immer die triviale Lösung  $x = 0$ . Die Menge aller Lösungen bildet einen Vektorraum.

**Beispiel 6:**

Die Lösungsmenge zu  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = 0$  ist die Gerade  $g = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Sind  $x$  und  $y$  Lösungen von  $Ax = b$ , so folgt

$$A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0,$$

d.h.  $x - y$  ist Lösung des homogenen Gleichungssystems.

**Beispiel 7:**

$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist Lösung zu  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Für jede andere Lösung  $x$  gilt, dass  $x - y$  das homogene Gleichungssystem löst, also  $x - y \in g$  mit  $g$  aus Beispiel 6.

Die Lösungsmenge ist also  $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Weitere Lösungen sind z.B.  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Die Lösungsmenge kann man auch beschreiben durch  $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Satz 8.5**

Ist  $x_s$  eine spezielle Lösung von  $Ax = b$ , so erhält man sämtliche Lösungen von  $Ax = b$  durch  $x_s + x_h$ , wobei  $x_h$  Lösung des homogenen Systems  $Ax = 0$  ist.

Literatur: [Rie] 12.1

Übungen: [Stingl] 5.4, 1; [Dürr] 4.2, 8

## 8.2. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren dient zur Lösung linearer Gleichungssysteme z.B:

$$\begin{array}{ccccrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & & + & 4x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & - & x_2 & & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$

bzw. als erweiterte Koeffizientenmatrix (Koeffizienten + rechte Seite)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Idee zur Lösung: Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn man

- Gleichungen/Zeilen mit einem Faktor  $\neq 0$  multipliziert
- Gleichungen/Zeilen vertauscht
- Vielfache einer Gleichung/Zeile auf eine andere Gleichung/Zeile addiert bzw. davon subtrahiert.

Mit diesen Umformungen (*elementare Zeilenoperationen*) versucht man, eine *Zeilenstufen-Form* zu erreichen.

**Beispiel 1:**

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) : 2 \\ \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -I \\ + 2 \cdot I \end{array} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot II \\ + II \end{array} \end{array}$$

Schritt 1a:  
Bei  $a_{11}$  soll eine 1 stehen

Schritt 1b:  
 $a_{21}, a_{31}, \dots$  sollen zu 0 werden

Schritt 2a:  
 $a_{22}$  soll 1 sein (schon erfüllt)

Schritt 2b:  
 $a_{32}, a_{42}, \dots$  sollen zu 0 werden

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \cdot (-1)$$

Schritt 3a:  
 $a_{33}$  soll 1 sein

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) - \text{III}$$

Schritt 3b:  
 $a_{34}, \dots$  sollen zu 0 werden

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{4}$$

Schritt 3b:  
 $a_{44}$  soll 1 sein

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

In ausführlicher Form:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & & + & 2x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & -3 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Durch rückwärts Einsetzen erhält man die Lösung:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2, \\ x_3 &= -3 + x_4 = -3 + 2 = -1, \\ x_2 &= \dots \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) + \text{IV}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad -\text{III} - 2 \cdot \text{IV}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad -2\text{II} - 2 \cdot \text{IV}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Lösung:  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 2$

Problem, das auftreten kann: Beim  $m$ -ten Schritt (a) ist  $a_{mm} = 0$ .

**1. Fall:** Es gibt ein  $a_{nm} \neq 0$ ,  $n > m$ :

Vertauschen der Zeilen  $n$  und  $m$  und weiter wie beschrieben.

**2. Fall:** Für alle  $n \geq m$  ist  $a_{nm} = 0$ :

Weiter mit nächster Spalte.

### Beispiel 2:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

bzw. als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \cdot \text{I} \\ -\text{I} \\ +\text{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \quad \curvearrowright$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad -2 \cdot \text{II}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad :(-6)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -\text{III} \\ -3 \cdot \text{III} \\ -\text{III} \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad -2 \cdot \text{II}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ausführlich:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 5x_3 & = & -3 \\ & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & & x_4 & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_3$  ist unbestimmt und kann als Parameter genutzt werden, mit  $x_3 = \lambda$  gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5\lambda \\ 1 - 2\lambda \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist eine Gerade.

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems,  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  Lösung des homogenen Gleichungssystems.

Im Allgemeinen (auch wenn die Anzahl der Variablen und Gleichungen unterschiedlich ist) erreicht man eine Form wie

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & 0 & 0 & * & \cdots & 0 & * & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & \cdots & 0 & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & \\ 0 & & \cdots & & & & 0 & 1 & * & c_k \\ 0 & & & \cdots & & & & & 0 & c_{k+1} \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & & & 0 & c_m \end{array} \right)$$

Interpretation:

- Falls  $c_{k+1} \neq 0$  oder ... oder  $c_m \neq 0$  ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
- Jede Variable, die zu einer \*-Spalte gehört kann als Parameter aufgefasst werden.
- Durch die Variablen zu den nicht \*-Spalten und die entsprechenden  $c_k$  erhält man eine spezielle Lösung des Gleichungssystems.

**Beispiel 3:**

$$\text{Zu } \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

erhält man eine spezielle Lösung durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man  $x_3 = \lambda$ ,  $x_6 = \mu$ , so ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda - 8\mu \\ 4 - 2\lambda - \mu \\ \lambda \\ 6 - 5\lambda \\ 0 - 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Literatur: [Stingl] 5.2; [Dürr] 4.1, 4.2 [Rie] 3.2; [Pap1] I.5.1, I.5.2

Übungen: [Stingl] 5.2, 1,2,4,5,6,8,9,10,12; [Dürr] 4.2, 1,2,3,4,5,6; [RieÜ] 3.2, 3.4; [PapÜ] I40, I41, I52

### 8.3. Matrizen

Bisher kennengelernt

- Matrix als Zahlenschema
- Matrix-Vektor-Multiplikation, z.B

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Definition 8.6

Sind  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so sei

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \alpha \cdot A &:= (\alpha \cdot a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (\text{skalare Multiplikation}). \end{aligned}$$

#### Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+0 & (-1)+2 \\ 1+1 & 0+1 & (-1)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### Bemerkung:

Offensichtlich gelten die üblichen Rechenregeln, z.B.  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ , d.h.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ist ein Vektorraum.

Die Operationen sind auch verträglich mit der Matrix-Vektor-Multiplikation, z.B.  $(A + B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x$  (Punkt-vor-Strich Rechnung).

Eine Matrix-Multiplikation ist nicht komponentenweise definiert, sondern orientiert sich am Einsetzen in ein lineares Gleichungssystem.

#### Beispiel 2:

Betrachte die linke Seite eines Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \\ x_1 & & & - & x_3 \end{array}$$

Einsetzen verschiedener x-Werte liefert verschiedene Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\text{ ergibt } \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\text{ ergibt } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &\text{ ergibt } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\text{ ergibt } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schematische Zusammenfassung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definition 8.7**

Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ .

Dann sei

$$C = (c_{ij}) = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times l} \quad \text{mit}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

**Bemerkungen:**

1. Beachte die Dimensionen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array} \cdot \begin{array}{c} l \\ \boxed{B} \\ \in \mathbb{R}^{n \times l} \end{array} & = & \begin{array}{c} l \\ \boxed{A \cdot B} \\ \in \mathbb{R}^{m \times l} \end{array} \end{array}$$

2. Die Matrix-Multiplikation kann man sich durch das Falk-Schema merken:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & c_{13} & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$c_{13} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)$$

3. Einen (Spalten-)Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  kann man auch als  $n \times 1$ -Matrix auffassen. Damit ist die Matrix-Vektor-Multiplikation ein Spezialfall der Matrix-Matrix-Multiplikation:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \boxed{x} \\ \in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{array} & = & \begin{array}{c} 1 \\ \boxed{Ax} \\ \in \mathbb{R}^{m \times 1} \end{array} \end{array}$$

**Beispiel 3:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Vertauschung bei der Matrix-Multiplikation ( $B \cdot A$  statt  $A \cdot B$ ) geht im Allgemeinen nicht.

**Beispiel 4:**

Schon aus Dimensionsgründen kann man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht bilden.

**Beispiel 5:**

Bei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  kann man sowohl  $A \cdot B$  als auch  $B \cdot A$  bilden. Die Ergebnisse haben unterschiedliche Dimensionen:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

**Beispiel 6:**

Bei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sind  $A \cdot B$  und  $B \cdot A$  aus  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , aber

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Satz 8.8**

*Abgesehen von der Vertauschung gelten für die Matrix-Rechnungen die üblichen Regeln, z.B.:*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C, & A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \\ (\alpha \cdot A) \cdot B &= \alpha \cdot (A \cdot B), & A \cdot (B \cdot x) &= (A \cdot B) \cdot x. \end{aligned}$$

**Beispiel 7:**

Bei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot x &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A \cdot (B \cdot x) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definition 8.9**

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält man aus  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die *transponierte Matrix*  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

**Beispiel 8:**

$$\begin{aligned} \text{Zu } A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ ist } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \\ \text{Zu } B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \text{ ist } B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Man kann bei Matrizen statt reeller Zahlen auch komplexe Zahlen als Einträge nehmen. Man schreibt entsprechend  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Statt der transponierten Matrix wird dann oft die *hermitesche Matrix*  $A^*$  (oder  $A^H$ ) betrachtet, die sich aus  $A^T$  ergibt, indem alle Einträge konjugiert komplex genommen werden.

**Beispiel 9:**

$$\text{Zu } A = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 0 & 3i \end{pmatrix} \text{ ist } A^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & -3i \end{pmatrix}.$$

**Satz 8.10**

Zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$  gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

**Bemerkung:**

Es ist  $B^T \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , d.h. die Matrix-Multiplikation  $B^T \cdot A^T$  ist durchführbar.

**Beispiel 10:**

Berechnung von  $B^T \cdot A^T$  mit  $A, B$  wie in Beispiel 8:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 2 & 1 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & -1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

**Bemerkungen:**

1.  $x \in \mathbb{R}^n$  fasst man je nach Zusammenhang auch als  $n \times 1$ -Matrix auf (Spaltenvektor).  
 $x^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  ist dann ein Zeilenvektor.

**Beispiel 11:**

Zu  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist  $x^T = (1 \ 2 \ 3)$ .

2. Das Skalarprodukt  $x \cdot y$  ergibt sich dann auch durch die Matrix-Multiplikation  $x^T \cdot y$ .

**Beispiel 12:**

Für  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 1;$$

als Matrixmultiplikation:

$$x^T \cdot y = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1).$$

Es ist aber

$$x \cdot y^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ -1 \ 1) = \begin{array}{c|ccc} & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{array} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

3. Bei  $A \cdot B$  kann man die Zeilen von  $A$  und die Spalten von  $B$  als Vektoren auffassen.  
 $A \cdot B$  besteht dann aus den einzelnen Skalarprodukten:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_1^T} \\ \vdots \\ \boxed{a_m^T} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{b_1} & \dots & \boxed{b_l} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{a_1^T} \\ \vdots \\ \boxed{a_m^T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{b_1} & \dots & \boxed{b_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \cdot b_1 & \dots & a_m \cdot b_l \end{pmatrix}.$$

Literatur: [Stingl] 5.4; [Dürr] 8.2; [Rie] 12.2; [Pap2] I.1

Übungen: [Stingl] 5.4, 3,4,5,6; [Dürr] 8.2, 1,2,3,4; [RieÜ] 12.2, 12.3; [PapÜ] I1-I7

## 8.4. Quadratische Matrizen

### Definition 8.11

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *quadratische Matrix*.

Gilt  $A = A^T$ , so heißt  $A$  *symmetrisch*.

Weiterhin heißt

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \text{ Diagonalmatrix,}$$

$$E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Einheitsmatrix,}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ Nullmatrix.}$$

### Bemerkungen:

1. „Symmetrisch“ bedeutet, dass die Matrix symmetrisch zur Hauptdiagonalen ist.
2. Die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix wird auch mit  $I_n$ ,  $I_{n \times n}$ ,  $E_n$ , ... bezeichnet.  
 $I$  steht für Identität.

### Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch.}$$

### Beispiel 2:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ist eine Diagonalmatrix. Für } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Satz 8.12**

Ist  $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$  eine Diagonalmatrix, so gilt:

$D \cdot A$  ergibt sich aus  $A$  durch Multiplikation der  $k$ -ten Zeile mit  $d_{kk}$ ,

$A \cdot D$  ergibt sich aus  $A$  durch Multiplikation der  $k$ -ten Spalte mit  $d_{kk}$ .

Es gilt  $I \cdot A = A \cdot I = A$ .

**Bemerkung:**

Wie in  $\mathbb{R}$  gilt auch bei Matrizen  $0 \cdot A = 0$ . Aber aus  $A \cdot B$  folgt nicht notwendigerweise  $A = 0$  oder  $B = 0$ , z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gibt es zu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine inverse Matrix  $B$  mit  $A \cdot B = I$ ? Wegen  $0 \cdot B = 0$  geht das sicher nicht für jedes  $A$ .

**Definition 8.13**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *regulär* oder *invertierbar*

$:\Leftrightarrow$  es gibt eine *inverse Matrix*  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A \cdot A^{-1} = I$ .

Ansonsten heißt  $A$  *singulär*.

**Beispiel 3:**

Ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  regulär? D.h. gibt es  $X = (x_{ij})$  mit  $A \cdot X = I$ , also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Dies entspricht 3 Gleichungssystemen mit verschiedenen rechten Seiten:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungssysteme kann man simultan lösen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & A & & I & & \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & & & \cdot (-1) & & \\ & & & -2 \cdot I & & \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad -2 \cdot \text{II} - \text{III}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$I \qquad A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Test:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Bemerkungen:

1. Das Verfahren wie im Beispiel 3 kann man allgemein zur Berechnung einer Inversen zu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nutzen. Man nennt es auch *Gauß-Jordan-Verfahren*.
2. Man sieht:

$A$  ist invertierbar

$\Leftrightarrow$   $A$  lässt sich durch elementare Zeilenoperationen auf die Einheitsmatrix bringen

$\Leftrightarrow$  es entsteht keine 0-Zeile.

### Satz 8.14

1. Ist  $A$  invertierbar, so auch  $A^{-1}$  und es ist  $(A^{-1})^{-1} = A$ , also  $A^{-1} \cdot A = I$ .
2. Ist  $A$  invertierbar, so auch  $A^T$  und es ist  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
3. Sind  $A$  und  $B$  invertierbar, so auch  $A \cdot B$  und es ist  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

### Bemerkung:

Dass  $A$  die Inverse zu  $A^{-1}$  ist, sieht man, wenn man die Bestimmung von  $A^{-1}$  durch simultanes Lösen eines Gleichungssystems wie in Beispiel 3 von unten nach oben liest.

Aus  $A^{-1} \cdot A = I$  folgt dann

$$I = I^T = (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T,$$

also  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

Sind  $A$  und  $B$  invertierbar, so gilt

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I,$$

also  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

**Beispiel 4** (Fortsetzung von Beispiel 3):

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:**

Hat man ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  und kennt man  $A^{-1}$ , so ergibt sich  $x = A^{-1}b$ , denn aus  $Ax = b$  folgt

$$A^{-1}b = A^{-1}Ax = I \cdot x = x.$$

Es gibt dann keine weitere Lösung, d.h.  $Ax = b$  ist bei regulärem  $A$  eindeutig lösbar.

**Beispiel 5:**

Gesucht ist die Lösung zu

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -x_2 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

also zu  $Ax = b$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Es ist

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Literatur: [Dürr] 8.3; [Rie] 12.3; [Pap2] I.3.2, I.4.5

Übungen: [Dürr] 8.3, 1,2,3; [RieÜ] 12.4, 12.8; [PapÜ] I26, I27, I28, I29, I30, I45

## 8.5. Determinanten

### Definition 8.15

Durch die *Determinante* wird jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Zahl  $\det A \in \mathbb{R}$  zugeordnet, wobei gilt:

1. Hat  $A$  Dreiecksgestalt, d.h.  $A = \begin{pmatrix} * & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$  oder  $A = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ , so ist  $\det A$  das Produkt der Diagonalelemente,
2.  $\det A$  ändert sich nicht bei Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,
3.  $\det A$  wechselt das Vorzeichen bei Vertauschung zweier Zeilen.

### Bemerkung:

Durch Umformungen wie beim Gauß-Eliminationsverfahren ohne „zu-1-Machen“ der Diagonalelemente kann man die Determinante berechnen.

### Beispiel 1:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot I \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot 3 \cdot 1 = -6 \end{aligned}$$

### Bemerkung:

Bei  $A = (a_{ij})$  wird auch  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  geschrieben.

**Satz 8.16**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

(Regel von Sarrus; „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“)

**Beispiel 2:**

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-3) \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 6 \\ = -18 - 6 + 18 = -6$$

**Satz 8.17**

1.  $A$  ist regulär  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Dann ist  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .
2.  $\det(A^T) = \det(A)$
3.  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

**Bemerkungen:**

1.  $\det(I) = 1 \Rightarrow 1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \\ \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
2. Achtung: Es gilt nicht  $\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det A$ .

**Beispiel 3:**

$$\det(2 \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Allgemein gilt bei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A.$$

Die Determinante kann man auch bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen nutzen:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ . Betrachtet wird das LGS  $A \cdot x = b$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ b & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \det A \cdot x_1 = \det \begin{pmatrix} b & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}}{\det A} \end{aligned}$$

**Satz 8.18**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär. Die  $k$ -te Komponente  $x_k$  der Lösung zu  $A \cdot x = b$  erhält man durch  $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$ , wobei  $A_k$  aus  $A$  entsteht, in dem die  $k$ -te Spalte durch  $b$  ersetzt wird. (Cramersche Regel)

**Beispiel 4:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist  $\det A = -2$  und man erhält

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$\text{Also ist } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Literatur: [Stingl] 5.3; [Dürr] 8.6; [Rie] 12.4; [Pap2] I.2.1, I.2.2, I.2.3

Übungen: [Stingl] 5.3, 1,2,3,4,5,6; [Dürr] 8.6, 1,3,4,5,6,7; [RieÜ] 12.6; [PapÜ] I11, I13a)+c), I17, I19, I22b), I42, I47

## A. Schreibweisen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  (natürliche Zahlen),

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  (ganze Zahlen),

$\mathbb{Q}$  (rationale Zahlen),

$\mathbb{R}$  (reelle Zahlen),

$\mathbb{R}^{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ,

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (abgeschlossenes Intervall),

$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (offenes Intervall, manchmal auch geschrieben als  $(a, b)$ ),

entsprechend  $]a, b]$  und  $[a, b[$ ,

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  ( $n$ -Fakultät),

z.B.  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ,

$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,

z.B.  $\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ ,

$\{x \mid A(x)\}$  ist die Menge aller  $x$ , für die die Eigenschaft  $A(x)$  gilt,

z.B.  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$ .

## B. Ergänzungen zu Reihen

### Satz B.1 (Leibniz-Kriterium)

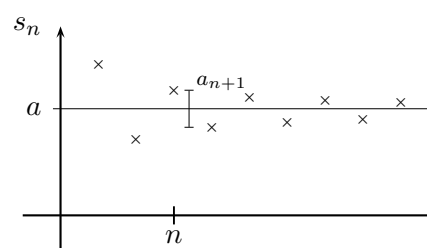
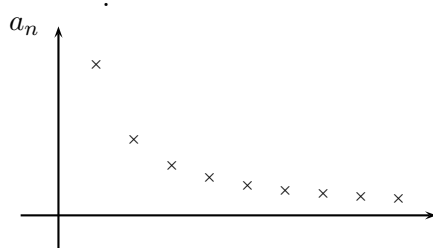
Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle monoton fallende Nullfolge, d.h.  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $a_k \geq a_{k+1}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ .

### Erläuterung:

$$\text{Es ist } s_1 = (-1)^{1+1} \cdot a_1 = a_1$$

$$s_2 = (-1)^{1+1} \cdot a_1 + (-1)^{2+1} \cdot a_2 = a_1 - a_2$$

$$s_3 = \dots = a_1 - a_2 + a_3$$

$$\vdots$$


Für den Reihenwert  $a$  und die  $n$ -te Partialsumme  $s_n$  gilt:  $|a - s_n| \leq a_{n+1}$ .

### Beispiel 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. (Der Reihenwert ist  $\ln 2$ .)

### Satz B.2 (Quotienten- und Wurzelkriterium)

Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$  oder  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ , so ist  $\sum a_k$  konvergent.   
 Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$  oder  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ , so ist  $\sum a_k$  divergent.

### Beispiel 2:

Sei  $a_k = \frac{1}{2^k}$ . Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^k}{2^{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

$\Rightarrow$  das Quotienten- und das Wurzelkriterium liefern die Konvergenz der (geometrischen) Reihe  $\sum \frac{1}{2^k}$ .

**Bemerkung:**

Bei Grenzwert = 1 ist keine Schlussfolgerung möglich.

**Beweisidee zum Wurzelkriterium:**

Sei  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$  und  $q \in ]a, 1[$ .

Dann gilt für alle großen  $k$ :  $\sqrt[k]{|a_k|} < q$ . Wir nehmen hier an, dies gelte für alle  $k$ .  
 $\Rightarrow |a_k| < q^k$ .

Da  $\sum q^k$  konvergiert (geometrische Reihe mit  $0 < q < 1$ ), ist  $\sum a_k$  nach Satz 3.12 konvergent.

Wann konvergiert eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ? Nach dem Quotientenkriterium konvergiert sie, falls

$$1 > \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

also falls

$$|x| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Das Wurzelkriterium gewährleistet Konvergenz, falls

$$\begin{aligned} 1 > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} &= |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \\ \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. \end{aligned}$$

**Satz B.3**

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe. Dann gibt es ein  $R \in [0, \infty]$ , so dass gilt:

$$\text{Für } |x| \begin{array}{l} < \\ > \end{array} R \text{ ist die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \begin{array}{l} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{array}.$$

$R$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Falls der entsprechende Limes existiert, gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{und} \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

**Beispiel 3:**

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , also  $a_k = 1$ . Dann gilt  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$ .  
 $\Rightarrow$  die Reihe konvergiert für  $|x| < 1$  und divergiert für  $|x| > 1$   
 (geometrische Reihe, Satz 3.9).

- Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot x^k$ .

Dann ist

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

Also ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot x^k$  für  $|x| < 1$  konvergent, für  $|x| > 1$  divergent.

Was ist für  $|x| = 1$ ?

Für  $x = 1$  ist die Reihe divergent:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

(harmonische Reihe, s. Satz 3.10).

Für  $x = -1$  ist sie konvergent:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(Leibniz-Kriterium, s. Satz B.1).

- Erinnerung:  $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ ,  $0! := 1$ .

Zu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  ist  $a_k = \frac{1}{k!}$ , also

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty,$$

d.h. die Potenzreihe konvergiert für jedes  $x$ .

**Bemerkung:**

Eine Potenzreihe konvergiert üblicherweise „bis zur ersten Singularität“.

**Beispiel 4:**

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  konvergiert für  $|x| < 1$ . Bei  $x = 1$  liegt eine Polstelle vor.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x)$  konvergiert für  $|x| < 1$ . Bei  $x = -1$  ist  $\ln(1-1) = \ln(0) = -\infty$ .

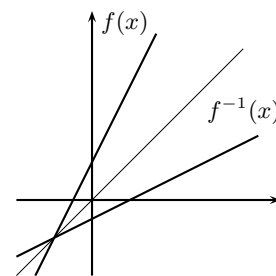
## C. Ergänzungen zur Differenzialrechnung

Was ist die Umkehrfunktion zu  $f : x \mapsto 2x + 1$ ? Es gilt:

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Die Umkehrgerade wird also beschrieben durch  $y \mapsto \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ .

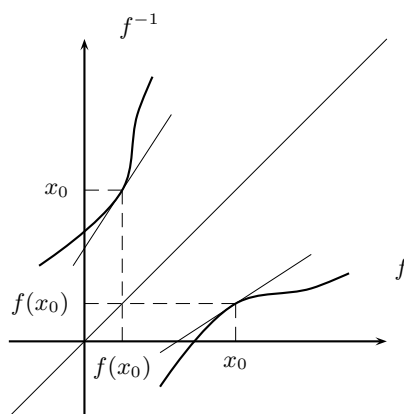
Die Steigung der ursprünglichen Geraden ist 2, die Steigung der Umkehrgeraden ist  $\frac{1}{2}$ . Diese Invertierung der Steigung gilt allgemein.



### Satz C.1

Ist  $f$  umkehrbar und differenzierbar in  $x_0$  mit  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  differenzierbar in  $y_0 := f(x_0)$  mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$



### Beweis:

Betrachte  $f$  und  $g := f^{-1}$ . Dann ist  $(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$  also  $(g \circ f)'(x) = 1$ . Mit der Kettenregel und  $y_0 = f(x_0)$  ergibt sich so

$$1 = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

und damit die Behauptung.

**Anwendungen zur Berechnung weiterer Ableitungen:**

1. Zu  $f : x \mapsto e^x$  ist  $f^{-1} : y \mapsto \ln y$ .

Wegen  $f'(x) = e^x$  ergibt sich dann mit Satz C.1:

$$(\ln y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}. \quad (1)$$

2. Mit (1) ergibt sich weiter für jedes  $a \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} (x^a)' &= \left( (e^{\ln x})^a \right)' = \left( e^{a \ln x} \right)' \\ &= \underbrace{e^{a \ln x}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{a \cdot \frac{1}{x}}_{\text{innere Ableitung}} \\ &= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}. \end{aligned}$$

**Beispiel 1:**

$$(\sqrt{x})' = \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Eine andere Herleitung der Ableitung von  $\sqrt{x}$  als Umkehrfunktion zu  $f(x) = x^2$  ergibt sich mit Satz C.1:  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ , also

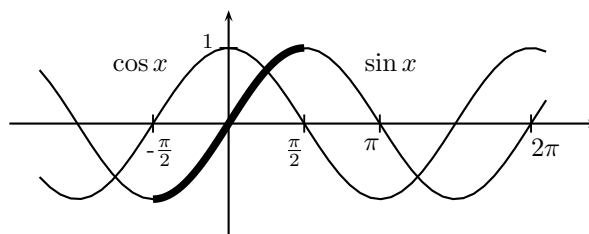
$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

3. Zu  $f : x \mapsto \sin x$  ist  $f^{-1}(y) = \arcsin y$ . Wegen  $f'(x) = \cos x$  ist dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Dies kann man weiter umformen, denn aus  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  folgt

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$



Da  $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $\cos x$  dort größer oder gleich 0 ist, ist

$$\cos(\arcsin y) = +\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2},$$

also

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Mit der Ableitung des Logarithmus kann man einen interessanten Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Beweis:**

Es ist  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . Für  $x_0 = 1$  heißt das speziell:

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} e &= e^1 = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right). \end{aligned}$$

Speziell ergibt  $h = \frac{1}{n}$ , dann  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Ein Polynom  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  besitzt die Ableitung

$$n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Dies überträgt sich auf Potenzreihen.

**Satz C.2**

Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ , so ist die durch diese Potenzreihe dargestellte Funktion für  $|x| < R$  differenzierbar mit Ableitung  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

**Bemerkung:**

Ist  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ , so ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|na_n|}} &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|})} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= \frac{1}{1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R, \end{aligned}$$

d.h. der Konvergenzradius der Ableitungs-Potenzreihe entspricht tatsächlich dem der ursprünglichen Reihe.

**Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}}_{=k} x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x. \end{aligned}$$

## D. Ergänzungen zur Vektorrechnung

### D.1. Skalarprodukt und Norm

#### Definition D.1

Ist  $V$  ein Vektorraum, so bezeichnet man jede Abbildung, die zwei Vektoren  $v_1, v_2 \in V$  eine reelle Zahl  $\langle v_1, v_2 \rangle$  zuordnet, und die die Eigenschaften 1. bis 3. aus Satz 7.6 besitzt, mit *Skalarprodukt*:

Zu  $v, v_1, v_2, v_3 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  gilt

1.  $\langle v, v \rangle \geq 0$  und  $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ ,
2.  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ ,
3.  $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$ ,  
 $\langle \lambda \cdot v_1, v_2 \rangle = \lambda \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda \cdot v_2 \rangle$ .

Bei  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  sagt man auch hier,  $v_1$  und  $v_2$  sind *orthogonal* und definiert die *Norm* von  $v$  als  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

#### Bemerkung:

Eine solche Norm kann man sich tatsächlich als (verallgemeinerten) Abstand vorstellen. Der Abstand von  $v_1$  zu  $v_2$  ist  $\|v_1 - v_2\|$ .

Es gelten die Eigenschaften aus Satz 7.10:

#### Satz D.2

Ist  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und zugehöriger Norm  $\|\cdot\|$ , so gilt für  $v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
2.  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$  (Dreiecksungleichung)
3.  $\langle v_2, v_1 \rangle \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$  (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

#### Beispiel 1:

Sei  $V$  der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist zu  $f, g \in V$  durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Eigenschaften 2. und 3. folgen aus den Rechenregeln des Integrals, und es ist

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx \geq 0,$$

wobei der Wert  $> 0$  ist, sobald  $f$  nicht überall gleich 0 ist.

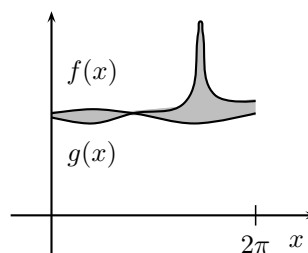
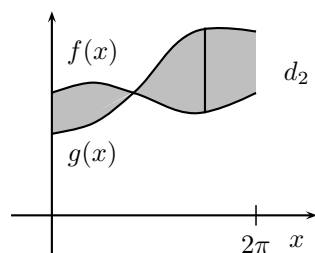
Die zugehörige Norm ist

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx},$$

mit dem Abstand

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

(Abstand im quadratischen Mittel).



### Beispiel 2:

Für  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = 1$  gilt

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi,$$

$$\|g\|^2 = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi,$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot 1 dx = 0.$$

$f$  und  $g$  sind also orthogonal. Man kann zeigen, dass (bzgl. dieses Skalarprodukts) alle Funktionen

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \dots$$

zueinander orthogonal sind.

## D.2. Abstandsbestimmung

Zur Abstandsbestimmung sucht man entsprechend orthogonale Verbindungsvektoren.

### Beispiel 1:

Abstand von  $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \right\}$  zum Punkt  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

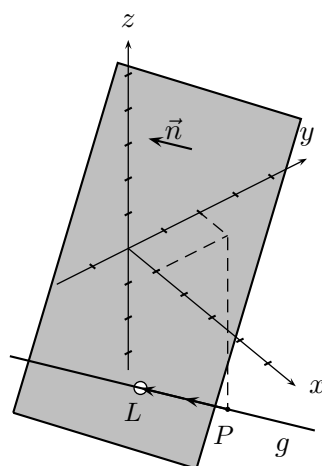
Mit dem Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und dem Punkt  $P$  erhält man die Gerade:

$$\begin{aligned} g &= \{ \vec{p} + \lambda \vec{n} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 2 - 2\lambda \\ -5 + 2\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Darstellung in die Gleichung zur Ebenenbeschreibung liefert den Parameter  $\lambda_0$  des Schnittpunkts  $L$  von  $g$  mit  $E$

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_0) - 2(2 - 2\lambda_0) + 2(-5 + 2\lambda_0) &= 5 \\ \Leftrightarrow 1 + \lambda_0 - 4 + 4\lambda_0 - 10 + 4\lambda_0 &= 5 \\ \Leftrightarrow 9\lambda_0 &= 18 \\ \Leftrightarrow \lambda_0 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Abstand} &= \|\lambda_0 \cdot \vec{n}\| = \left\| 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$



**Beispiel 2:**

Abstand der Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Idee: Suche  $P \in g_1$ ,  $Q \in g_2$  bzw.  $\lambda_0, \mu_0$  entsprechend, so dass der Verbindungsvektor auf beiden Richtungsvektoren senkrecht steht, d.h., dass für  $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$  gilt:

$\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , also:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 \\ 6 + 2\mu_0 \\ -1 + 4\mu_0 + 2\lambda_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 \\ 6 + 2\mu_0 \\ -1 + 4\mu_0 + 2\lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot (2 - \lambda_0) - 2 \cdot (-1 + 4\mu_0 + 2\lambda_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 5\lambda_0 - 8\mu_0 = 0 \end{aligned} \tag{I}$$

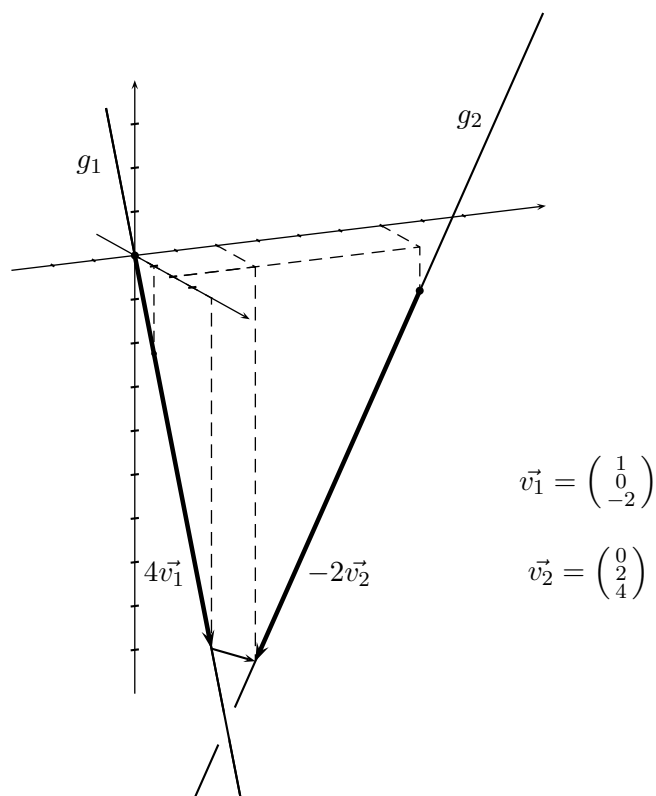
$$\begin{aligned} \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 \\ 6 + 2\mu_0 \\ -1 + 4\mu_0 + 2\lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (6 + 2\mu_0) + 4 \cdot (-1 + 4\mu_0 + 2\lambda_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8 + 8\lambda_0 + 20\mu_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2\lambda_0 + 5\mu_0 = 0 \end{aligned} \tag{II}$$

$$2 \cdot \text{(I)} + 5 \cdot \text{(II)} : \quad 18 + 9\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_0 = -2$$

$$\text{in (II) eingesetzt: } 2 + 2\lambda_0 - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 4$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 6 + 2(-2) \\ -1 + 4(-2) + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Abstand der Geraden} = \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

**Beispiel 3:**

Wie lautet der Punkt  $L$  auf der Ebene, die durch den Ursprung geht und von  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird, der am nächsten am Punkt  $P$  mit  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$  liegt?

Es ist  $\vec{l} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und  $\vec{d} := \vec{p} - \vec{l}$  muss senkrecht zur Ebene, also senkrecht zu  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  sein:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \vec{d} \cdot \vec{v}_1 \\ &= (\vec{p} - (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)) \cdot \vec{v}_1 \\ &= \vec{p} \cdot \vec{v}_1 - \alpha_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - \alpha_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1. \end{aligned}$$

Nun ist hier  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$ , also

$$\alpha_1 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Entsprechend ergibt sich  $\alpha_2 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{6}{6} = 1$ .

Damit ist  $\vec{l} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Bemerkung:**

Beispiel 3 kann man auf einen beliebigen Vektorraum erweitern:

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $E$  die durch  $v_1, \dots, v_n \in V$  aufgespannte Ebene durch den Ursprung (also die Menge aller Linearkombinationen der  $v_k$ ) und die  $v_k$  seien (bzgl. eines in  $V$  definierten Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) orthogonal zueinander.

Dann ist der zu  $p \in V$  nächstgelegene Punkt  $l$  auf  $E$  gegeben durch

$$l = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{\langle p, v_k \rangle}{\|v_k\|^2},$$

wobei  $\|\cdot\|$  die von dem Skalarprodukt induzierte Norm ist.

**Beispiel 4:**

Beim Vektorraum  $V$  der stetigen Funktionen auf  $[0, 2\pi]$  mit dem in Beispiel 1 eingeführten Skalarprodukt erhält man als beste Approximation eines  $f \in V$  durch die Funktionen

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$$

die Funktion

$$\begin{aligned} l &= a_0 \cdot 1 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx, \\ a_k &= \frac{\langle f, \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \\ b_k &= \frac{\langle f, \sin(kx) \rangle}{\|\sin(kx)\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx. \end{aligned}$$

Dies sind genau die Fourier-Koeffizienten zu  $f$ .

## E. Ergänzungen zu Determinanten

### Bemerkungen zur Determinantenberechnung:

1. Wegen  $\det A = \det A^T$  kann man zur Berechnung statt Zeilen- auch Spaltenoperationen nutzen, z.B

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

2. Man kann aus Zeilen oder Spalten Faktoren herausziehen.

#### Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \stackrel{:2}{=} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{:3}{=} 2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{+I}{=} \\ & = 2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = -2 \cdot 3 \cdot 1 = -6 \end{aligned}$$

Damit ist dann auch  $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$  verständlich.

3. Man kann nach Zeilen oder Spalten entwickeln.

#### Beispiel 2:

Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} & = +2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{2} \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \cancel{2} & 6 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \cancel{2} & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix} \\ & = 2 \cdot (-9) + 12 + 0 = -6. \end{aligned}$$

Entwicklung nach der 2. Zeile:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} &= -(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\quad - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 12 - 3 \cdot 6 - 0 = -6. \end{aligned}$$

Allgemein: Berechnung durch Entwicklung nach einer Spalte/Zeile:

Summe über die Spalten-/Zeilenelemente mit alternierenden Vorzeichen, multipliziert mit der Determinante der entsprechend zusammengestrichenen Matrix.

$$\text{Vorzeichenschema: } \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### Beispiel 3:

Entwicklung nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 + 75 + 0 - 5 - (-10) + 0) \\ &\quad - 2 \cdot (0 + 30 - 4 - 0 + 4 - 12) \\ &= 82 - 2 \cdot 18 = 46. \end{aligned}$$

### Bemerkungen:

1. Durch die Entwicklungsformel ist klar:

$$A \in \mathbb{Z}^{n \times n} \Rightarrow \det A \in \mathbb{Z}$$

2. Sei  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . Wann ist  $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ?

Wegen  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$  und 1. muss dann notwendig  $\det A = 1$  sein. Dies ist auch hinreichend, denn die Elemente von  $A^{-1}$  ergeben sich dann nach der Cramerschen Regel als ganze Zahlen.

4. Mit Determinanten kann man Inverse berechnen.

**Beispiel 4:**

Gesucht ist die Inverse  $X$  zu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Cramerschen Regel und der Entwicklung nach Spalten ist dann

$$x_{11} = \frac{1}{\det A} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\det A} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|,$$

$$x_{21} = \frac{1}{\det A} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{-1}{\det A} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right|,$$

....

**Satz 5.1**

Sei  $A_{ik}$  die Determinante der aus  $A$  entstehenden Matrix nach Streichung der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte, multipliziert mit  $(-1)^{i+k}$ :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \left| \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \right|.$$

Dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:**

Beachte die transponierten Plätze der  $A_{ik}$ .

**Beispiel 5:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

4. Im Folgenden wird die Beziehung

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \text{das LGS } Ax = b \text{ ist eindeutig lösbar}$$

genauer untersucht bzw. angewendet.

**Bemerkungen:**

1.  $\det A = 0 \Leftrightarrow A$  singulär
  - $\Leftrightarrow$  Beim Gauß-Verfahren entsteht eine Null-Zeile oder -Spalte
  - $\Leftrightarrow$  Man kann eine Zeile/Spalte durch die anderen darstellen
  - $\Leftrightarrow$  Die Zeilen/Spalten sind linear abhängig
  - $\stackrel{\text{im } \mathbb{R}^{3\text{-dim}}}{\Leftrightarrow}$  Die Zeilen/Spalten liegen in einer Ebene

Insbesondere gilt:

Die Spalten sind Linearkombination voneinander

$\Leftrightarrow$  Die Zeilen sind Linearkombination voneinander.

**Beispiel 6:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{= \frac{1}{5}(3I-II)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = I+II$$

2. Es gilt

$$A, B \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow A \cdot B \text{ ist invertierbar}$$

$$\Updownarrow \qquad \qquad \Updownarrow$$

$$\det A, \det B \neq 0 \Leftrightarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \neq 0$$

Also gilt auch:  $A$  oder  $B$  ist singulär  $\Leftrightarrow A \cdot B$  ist singulär.

**Satz E.2**

Durch 3 vorgegebenen Punkte  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , mit  $x_1, x_2, x_3$  verschieden, gibt es genau eine Parabel.

**Beweis:**

Der Ansatz für  $f(x) = ax^2 + bx + c$  führt zu

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \neq 0,$$

falls  $x_1, x_2, x_3$  verschieden sind.

**Bemerkung:**

Satz E.2 kann man auf beliebigen Punktzahl  $n$  und Polynome von Grad  $n - 1$  verallgemeinern. Die entstehende Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_k - x_l)$$

heißt Vandermond-Determinante.

**Index**

- A**
- Ableitung ..... 48, 69  
 Exponentialfunktion ..... 119  
 logarithmus ..... 117  
 Potenzreihe ..... 118  
 Rechenregeln ..... 51  
 Tabelle ..... 53  
 Winkelfunktionen ..... 52  
 Wurzelfunktion ..... 117
- Abstandsbestimmung ..... 122
- achsensymmetrisch ..... 17
- Additionstheoreme ..... 13  
 Herleitung ..... 32
- Ankathete ..... 13
- antiparallel ..... 84
- Arcus-Funktionen ..... 22
- assoziativ ..... 77
- Aufleiten ..... 70
- B**
- Basis ..... 80  
 kanonische ..... 80
- Betrag ..... 82
- Betrags-Funktion ..... 16
- Bisektionsverfahren ..... 46
- Bogenmaß ..... 12
- C**
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . 84, 120
- Cosinus ..... 12  
 hyperbolicus ..... 14
- Cotangens ..... 12
- Cramersche Regel ..... 111
- D**
- De L'Hospital ..... 58
- Determinante ..... 109
- Determinaten  
 Berechnung ..... 109, 126  
 Zeilen-/Spaltenentwicklung ..... 126
- Differenzenquotient ..... 48
- Differenzialrechnung ..... 48, 69
- differenzierbar ..... 48
- Dimension ..... 80
- distributiv ..... 78
- divergent ..... 34
- Dreiecksgestalt ..... 109
- Dreiecksungleichung ..... 16, 30, 84, 120
- E**
- Ebene ..... 79, 88, 89
- Einheitsmatrix ..... 107
- elementare Zeilenoperationen ..... 94
- $\varepsilon$ -Umgebung ..... 34, 35
- eulersche Zahl ..... 14, 42, 118
- Exponentialfunktion ..... 14  
 Ableitung ..... 119
- Extremstelle ..... 54
-

---

<b>F</b>	
Fakultät .....	42
Falk-Schema .....	100
Feinheit .....	64
Fläche .....	64
Folge.....	34
divergent.....	34
Grenzwert .....	34
konvergent.....	34
Rechenregeln.....	35
Fundamentalsatz der Algebra.....	31
Funktion	
Betrags- .....	16
differenzierbare .....	48
Exponential.....	14
gebrochen rationale .....	9
gerade .....	17
Grenzwert .....	44
Komposition .....	25
lineare .....	2
Logarithmus- .....	23
Modifikation .....	25
monotone .....	18, 54
quadratische .....	4
Skalierung .....	26
stetige .....	46
trigonometrische .....	12
Umkehr- .....	18, 116
ungerade .....	17
Verkettung.....	25
Verschiebung.....	25
Wurzel- .....	21
<b>G</b>	
ganze Zahlen.....	112
Gaußsche Zahlenebene .....	28
Gaußsches Eliminationsverfahren .....	94
Gegenkathete .....	13
geometrische Reihe.....	39
geometrisches Mittel .....	67
Gerade .....	2, 89
gerade Funktion .....	17
Geschwindigkeit .....	50
Grenzwert.....	34
Funktionen.....	44
<b>H</b>	
harmonische Reihe .....	40
Heavside-Funktion .....	44
hermitesche Matrix .....	102
homogen .....	93
Hyperbelfunktionen .....	14
Hypotenuse .....	13
<b>I</b>	
Identität .....	25
imaginäre Einheit .....	28
Imaginärteil.....	29
inhomogen .....	93
Integral .....	64

---

unbestimmtes .....	69	Kriterium	
uneigentliches .....	67	Leibniz .....	113
Integralrechnung .....	64, 69	Quotienten- .....	113
Rechenregeln .....	68	Vergleichs- .....	40
Symmetrien .....	68	Wurzel- .....	113
Tabelle .....	70	Kurvendiskussion .....	56
integrierbar .....	64, 65		
Intervall .....	112	<b>L</b>	
abgeschlossen .....	112	Lösungsmenge .....	93
offen .....	112	Länge .....	82
inverse Matrix .....	106	Leibniz-Kriterium .....	113
inverses Element .....	77	Limes .....	34
invertierbar .....	106, 107	linear unabhängig .....	80
		lineare Näherung .....	61
<b>K</b>		lineares Gleichungssystem .....	91
kanonische Basis .....	80	homogen .....	93
Kettenregel .....	51	inhomogen .....	93
Koeffizient .....	91	Linearkombination .....	79
Koeffizientenmatrix .....	94	linksgekrümmt .....	56
Koeffizientenvergleich .....	10	Logarithmus .....	23
kommutativ .....	77	Ableitung .....	117
komplexe Zahlen .....	28	lokale Extremstelle .....	54
Komposition .....	25		
konjugierte komplexe Zahl .....	29	<b>M</b>	
konkav .....	56	Maclaurinsche Reihe .....	62
konvergent .....	34	Matrix .....	91, 99
Konvergenzradius .....	114	Diagonal- .....	105
konvex .....	56	Einheits- .....	105
Krümmungsverhalten .....	56	hermitesche .....	102
Kreuzprodukt .....	85	inverse .....	106

---

- 
- Null-.....105  
 quadratische ..... 105  
 Rechenregeln ..... 101  
 regulär .....106, 110  
 singular .....106  
 symmetrisch ..... 105  
 transponiert ..... 102  
 Matrix-Matrix-Multiplikation ..... 100  
 Matrix-Vektor-Multiplikation ..... 92  
 Maximum ..... 54, 55  
 Minimum .....54, 55  
 monoton ..... 18, 54
- N**
- natürliche Zahlen ..... 112  
 neutrales Element ..... 77  
 Newton-Verfahren ..... 60  
 Norm ..... 82, 120  
 Normalenform .....89  
 Normalenvektor ..... 88  
 Nullfolge ..... 35  
 Nullstellensatz ..... 46
- O**
- orthogonal .....83, 86  
 Ortsvektor ..... 77
- P**
- Parabel ..... 4  
 parallel .....84  
 Parallelogramm ..... 86
- Parameter-Darstellung ..... 88  
 Partialbruch-Zerlegung ..... 9, 75  
 Partialsumme ..... 38  
 partielle Integration ..... 71  
 Pfeil ..... 76  
 Polardarstellung .....32  
 Polynom ..... 7  
     Grad .....7  
 Polynomdivision .....9  
 Potenzreihe ..... 41  
     Ableitung ..... 118  
     Tabelle .....43  
 pq-Formel ..... 4  
 Produktregel .....51  
 punktsymmetrisch .....17
- Q**
- quadratische Ergänzung ..... 4  
 Quadratische Matrizen ..... 105  
 Quotientenkriterium ..... 113  
 Quotientenregel ..... 51
- R**
- Rücksubstitution .....74  
 rationale Zahlen ..... 112  
 Realteil ..... 29  
 rechtsgekrümmt ..... 56  
 Rechtssystem ..... 86  
 reelle Zahlen ..... 112  
 Regel von Sarrus ..... 110
-

- 
- regulär ..... 106, 110
- Reihe ..... 38
- divergent ..... 38
  - geometrische ..... 39
  - Grenzwert ..... 38
  - konvergent ..... 38
  - Potenz- ..... 41
  - Rechenregeln ..... 40
- Restglied ..... 62
- Richtungsvektor ..... 88
- Riemann-Integral ..... 64
- Riemannsche Zwischensumme ..... 64
- S**
- Sattelstelle ..... 56
- Scheitelpunkt ..... 4
- Schnittpunkt ..... 89
- Sekantensteigungen ..... 48
- singulär ..... 106
- Sinus ..... 12
- hyperbolicus ..... 14
- skalare Multiplikation ..... 77, 99
- Skalarprodukt ..... 81, 85, 120
- maximal/minimal ..... 84
  - Rechenregeln ..... 81
  - Standard- ..... 81
- Skalierung ..... 26
- Spalte ..... 91
- spezielle Lösung ..... 93
- stückweise stetig ..... 66
- Stammfunktion ..... 69
- Stauchung ..... 26
- Steigung ..... 2, 48
- stetig ..... 65
- stetig differenzierbar ..... 55
- Stetigkeit ..... 46
- Streckung ..... 26
- streng monoton ..... 18, 54
- Substitution ..... 73
- symmetrische Matrix ..... 105
- T**
- Tangens ..... 12
- Tangente ..... 48, 60
- Taylorpolynom ..... 61
- Taylorreihe ..... 62
- Teleskopsumme ..... 39
- transponierte Matrix ..... 102
- U**
- Umgebung
- $\varepsilon$ -Umgebung ..... 34, 35
- umkehrbar ..... 18
- Umkehrfunktion ..... 18, 21, 116
- unbestimmtes Integral ..... 69
- uneigentliches Integral ..... 67
- ungerade Funktion ..... 17
- V**
- Vektor ..... 77
- orthogonal ..... 83, 86
-

